

THÈSE

présentée par

Florian LHUILLIER

pour obtenir le titre de

docteur de l'Institut de Physique du Globe de Paris

spécialité : Géophysique

Variabilité et prédictibilité de la dynamo terrestre

soutenue le 24 juin 2011, devant le jury composé de :

Dominique Jault	Rapporteur,
Catherine Johnson	Rapporteur,
Vincent Courtillot	Examineur,
Stuart Gilder	Examineur,
Julien Aubert	Co-directeur de thèse,
Gauthier Hulot	Directeur de thèse.

Résumé

Grâce aux mouvements de convection dans le noyau fluide de la Terre, la géodynamo est responsable de la génération du champ magnétique terrestre principal qui nous protège notamment du vent solaire. Nous nous attachons dans cette thèse à mieux décrire certains aspects de la dynamique temporelle de cette géodynamo. Dans une approche comparative entre observations et modèles numériques, nous nous intéressons tout d'abord aux temps de corrélation qui caractérisent la variation séculaire du champ géomagnétique à différentes échelles spatiales. En relation avec les premiers schémas d'assimilation des données géomagnétiques, nous abordons ensuite la question de la portée de prédictibilité de la géodynamo, à savoir combien de temps à l'avance il serait possible de prédire le champ magnétique terrestre (par analogie avec la limite de l'ordre d'une semaine en météorologie). Concernant la variabilité à long terme du champ géomagnétique, nous discutons finalement de la possibilité d'utiliser des longues simulations de la géodynamo dans une perspective de comparaison avec des données paléomagnétiques, et nous penchons plus précisément sur la question de la remise à l'échelle de l'axe du temps.

Summary

Thanks to convective motion in the liquid core of the Earth, the geodynamo is responsible for the generation of the main geomagnetic field which protects us, in particular, against the solar wind. In this thesis we endeavour to better understand some aspects of the temporal dynamics of the Earth's dynamo. In a comparative approach between observations and numerical models, we are first of all interested in examining the correlation times which characterize the secular variation of the geomagnetic field on various length scales. In connection with the first schemes for assimilation of geomagnetic data, we then tackle the issue of the range of predictability of the geodynamo, to wit how much time in advance it would be possible to predict the Earth's magnetic field (by analogy with the limit of one week in meteorology). As regards the long-term variability of the geomagnetic field, we finally discuss the possibility of using long simulations of the geodynamo in a perspective of comparison with palaeomagnetic data, and we more precisely confine our attention to the rescaling of the time axis.

Zusammenfassung

Durch Konvektionsströmen im flüssigen Erdkern erzeugt der Geodynamo das geomagnetische Hauptfeld, welches uns vor dem Sonnenwind schützt. In dieser Dissertation sollen einige Aspekte der zeitlichen Dynamik dieses Geodynamos näher untersucht werden. Zuerst werden durch den Vergleich zwischen Beobachtungen und numerischen Modellen die Korrelationszeiten überprüft, welche die Säkularvariation des Erdmagnetfeldes auf verschiedenen Längenskalen charakterisieren. Dann wird in Verbindung mit Assimilationsalgorithmen für geomagnetische Daten die Vorhersagbarkeit des Geodynamos ermittelt: Wie lange im Voraus kann man Aussagen über das Erdmagnetfeld treffen, analog zu der ca. 7-Tages Grenze in der Wettervorhersage? Mit Blick auf die langfristige Variabilität des Erdmagnetfeldes wird schlussendlich die Möglichkeit diskutiert, Simulationen auf großen Zeitskalen mit paläomagnetischen Daten zu vergleichen, wobei besonders die Reskalierung der Zeitachse eine Rolle spielen wird.

Tiivistelmä

Maapallon ulkoytimen nestemäisen osan konvektioliikkeet ylläpitävät geodynamaa, joka on vastuussa geomagneettisen pääkentän synnystä; tämä kenttä on erityisen tärkeä, koska se suojaaa maapalloa aurinkotuulelta. Tämän väitöskirjan tarkoituksena on pyrkiä ymmärtämään eräitä maapallon dynamon aikadynamiikan osa-alueita tarkemmin. Käytössä oleva lähestymistapa perustuu havaintojen ja numeeristen mallien vertailulle. Ensiksi tarkastellaan korrelaatioaikoja, jotka ovat tunnusomaisia geomagneettisen kentän sekulaarivaihtelulle eri pituusskaaloilla, joista kukin määritellään annetulle palloharmoniselle asteelle. Sitten, yhdessä geomagneettisen datan assimilaatioratkaisujen kanssa, tutkitaan geodynamon ennustettavuuskantamaa: kuinka kauan etukäteen olisi mahdollista ennustaa maapallon magneettikenttää (verraten meteorologian yhden viikon kantamaan). Geomagneettisen kentän pitkän aikavälin vaihtelevuutta koskien lopuksi käsitellään mahdollisuutta käyttää pitkiä geodynamosimulaatioita vertailussa paleomagneettisen datan kanssa; erityishuomiota kiinnitetään aika-akselin uudeelleenmitoitukseen.

Table des matières

Résumé / Summary	3
1 Introduction	9
1.1 Le champ magnétique terrestre	9
1.1.1 Différentes origines	9
1.1.2 Différentes observations	9
1.1.3 Différents phénomènes	11
1.2 Le noyau terrestre	13
1.2.1 Contraintes sismologiques	13
1.2.2 Contraintes minéralogiques et géochimiques	14
1.2.3 Contraintes magnétiques et énergétiques	15
1.3 La dynamo terrestre	16
1.3.1 Problématiques actuelles	16
1.3.2 Approches possibles	17
1.3.3 Objectifs de ce mémoire	19
2 Description et modélisation du champ magnétique terrestre	21
2.1 Description usuelle du champ magnétique terrestre	21
2.2 Équations de la géodynamo	29
2.2.1 Équations dimensionnées	29
2.2.2 Adimensionnements usuels	32
2.2.3 Grandeurs sans dimension	35
2.3 Modèles numériques de géodynamo	37
2.3.1 Considérations physiques	37
2.3.2 Considérations pratiques	38
3 Temps de corrélation du champ magnétique terrestre	39
3.1 Introduction	39
3.1.1 Définition des temps de corrélation	39
3.1.2 Interprétation des temps de corrélation	40

3.1.3	Style de décroissance des temps de corrélation	41
3.2	Modèles étudiés	41
3.2.1	Modèles de champ géomagnétique	41
3.2.2	Modèles de dynamo	42
3.2.3	Gamme choisie d'harmoniques sphériques	42
3.3	Formalisme statistique	44
3.3.1	Temps de corrélation instantanés	44
3.3.2	Temps de corrélation moyens	45
3.3.3	Validité du formalisme statistique	46
3.4	Algorithme utilisé	48
3.4.1	Position du problème	48
3.4.2	Description de l'algorithme	49
3.4.3	Tests synthétiques	50
3.5	Comparaison des deux modèles	52
3.5.1	Description des résultats	52
3.5.2	Variabilité des paramètres des modèles	55
3.5.3	Compatibilité statistique de la loi linéaire inverse	56
3.6	Conclusion	58
4	Prédictibilité à court terme du champ magnétique terrestre	61
4.1	Introduction	62
4.2	Models and tools	64
4.2.1	Numerical models	64
4.2.2	Perturbative method	67
4.3	Robustness of the error growth	68
4.3.1	Error growth for a case study	69
4.3.2	Variability of the error growth	71
4.3.3	Impact of limited resolution	76
4.4	Scaling laws	80
4.4.1	Cause of the error growth	80
4.4.2	Comparing the growth rate to the secular-variation timescale	83
4.4.3	Comparing the growth rate to the dissipation times	86
4.5	Summary of results	90
4.6	Implications for the limit of predictability of the Earth's dynamo	91
5	Variabilité à long terme du champ magnétique terrestre	95
5.1	Introduction	95
5.1.1	Observations paléomagnétiques du champ	95
5.1.2	Analyse de la durée des chrons	96

5.1.3	Approche numérique	100
5.2	Modèles étudiés	101
5.2.1	Choix des modèles	101
5.2.2	Mise à l'échelle du temps	102
5.2.3	Application aux modèles étudiés	104
5.3	Tendances observées	108
5.3.1	Fréquence moyenne des inversions	108
5.3.2	Distribution de la durée des chrons	111
5.3.3	Corrélation entre la durée des chrons et l'intensité moyenne	113
5.4	Conclusion	113
6	Conclusions et perspectives	117
	Remerciements	121
	Bibliographie	123
A	Lettre sur le temps caractéristique de la variation séculaire	137
B	Lettre sur la portée de prédictibilité de la dynamo terrestre	143

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le champ magnétique terrestre¹

1.1.1 Différentes origines

Tel que nous le connaissons, le champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique) est produit par différentes sources : des sources d'origine interne d'une part, des sources d'origine externe d'autre part. Le champ d'origine interne provient essentiellement de mouvements de fluide conducteur dans le noyau (un phénomène connu sous le nom de géodynamo), et dans une moindre mesure de phénomènes d'aimantation des roches dans la croûte superficielle, et de courants induits dans la croûte et le manteau. Le champ d'origine externe provient quant à lui de systèmes complexes de courants électriques dans l'ionosphère et la magnétosphère. Dans ce mémoire, nous choisissons de nous intéresser au champ du noyau (ou champ magnétique principal), de nature grossièrement dipolaire avec une amplitude à la surface de la Terre de l'ordre de 30 000 nT à l'équateur, et de 60 000 nT à proximité des pôles. En comparaison avec le champ crustal qui produit ponctuellement des intensités de quelques milliers de nanoteslas, et du champ externe qui produit en temps calme des intensités de quelques dizaines de nanoteslas, celui-ci, dont la morphologie est schématiquement illustrée à la figure 1.1, constitue de loin la principale contribution du champ magnétique total.

1.1.2 Différentes observations

Pour suivre l'évolution du champ magnétique terrestre, et en particulier du champ magnétique principal, nous disposons d'une large gamme d'observations : des observations directes d'une

¹Pour une introduction générale sur le champ magnétique terrestre, le lecteur pourra par exemple se référer à la présentation en français de Le Mouél [1976], aux manuels de référence de Merrill *et al.* [1996] et Campbell [2003], ou la synthèse récente par Hulot *et al.* [2010a].

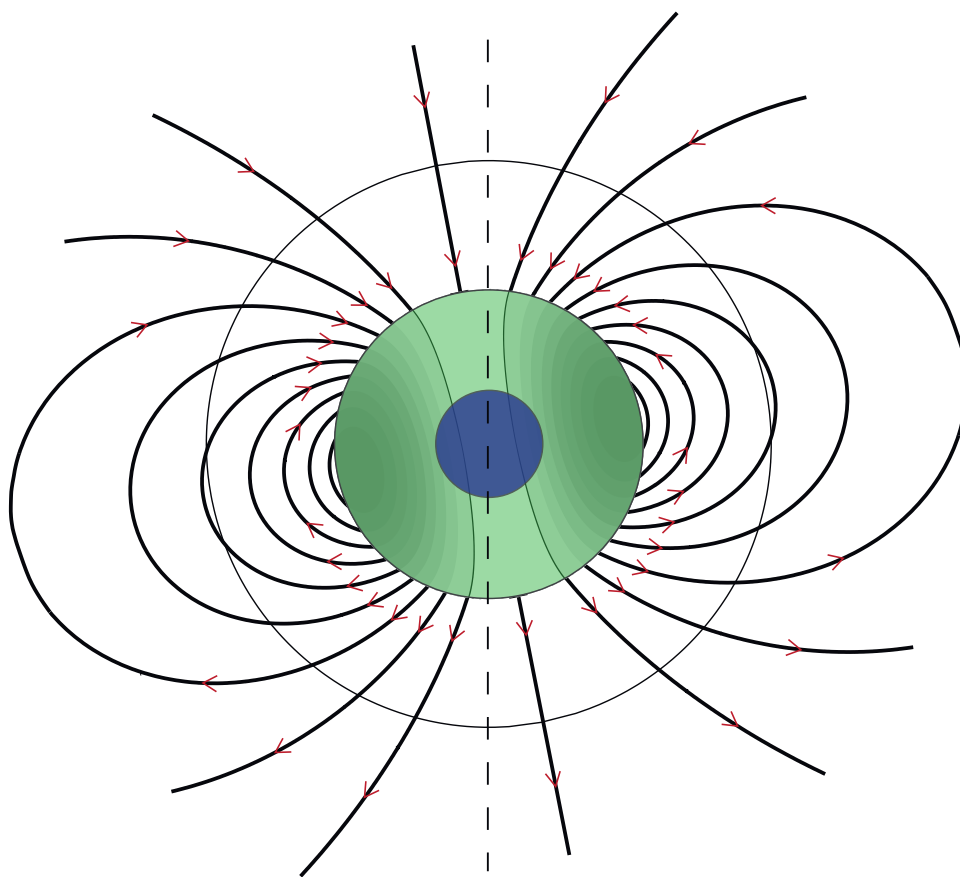


FIGURE 1.1 – Coupe simplifiée de la Terre d'après Olson et Amit [2006] illustrant les lignes de champ d'un dipôle axial légèrement incliné par rapport à l'axe de rotation (ligne verticale tiretée). Le manteau solide (supposé dépourvu de sources magnétiques) est représenté en blanc, le noyau fluide en vert, et la graine solide en bleu.

part, des observations indirectes d'autre part. Les observations directes reposent depuis 1840 sur un réseau global d'observatoires, et sont complétées depuis 1966 par des mesures du champ magnétique terrestre à bord de satellites spécialement dédiés à cet effet. En adoptant la description en harmoniques sphériques proposée au dix-neuvième siècle par le scientifique allemand Carl Friedrich Gauss, ceci a permis la construction des modèles de champ CM [Sabaka *et al.*, 2002] pour retracer les évolutions spatio-temporelles du champ depuis les années 1960, et des générations de modèles CHAOS [Olsen *et al.*, 2010], GRIMM [Lesur *et al.*, 2010] et POMME [Maus *et al.*, 2010] pour retracer avec une plus grande précision l'évolution du champ interne depuis les années 2000. D'autres observations directes permettent également d'accéder à des informations quantitatives sur le champ magnétique terrestre pour des temps plus anciens. Il s'agit des mesures de déclinaison (et plus rarement d'inclinaison) issues des carnets de navigation datant de l'époque des temps modernes. En complément des données d'observatoires limitées en nombre, celles-ci ont permis la construction du modèle *gufm1* [Jackson *et al.*, 2000] retraçant l'évolution spatio-temporelle du champ magnétique principal depuis le début du seizième siècle. Malgré l'absence de données d'intensité avant 1840, ce modèle profite en effet du fait qu'il est possible de reconstruire de manière unique la géométrie du champ à partir des seules données directionnelles [Hulot *et al.*, 1997]. Grâce à l'archéomagnétisme, l'étude de l'aimantation d'objets fabriqués (tels que des briques, des tuiles ou des poteries) permet d'obtenir des informations indirectes sur le champ magnétique terrestre durant les quelques derniers millénaires [voir p.ex. Gallet *et al.*, 2009]. Ces données ont notamment permis l'élaboration des modèles CALSK [Korte et Constable, 2005] décrivant les grandes tendances de l'évolution du champ magnétique terrestre depuis le cinquième millénaire avant Jésus-Christ. A l'échelle des temps géologiques, le paléomagnétisme fournit des informations précieuses sur les caractéristiques du champ principal à partir de l'étude de l'aimantation des roches volcaniques ou sédimentaires [voir p.ex. Butler, 1992]. L'étude des anomalies magnétiques du plancher océanique permet également de connaître avec précision la polarité du champ magnétique terrestre durant les 160 derniers millions d'années [voir p.ex. Lowrie et Kent, 2004].

1.1.3 Différents phénomènes

Les différents types d'observations présentés dans le paragraphe précédent indiquent que le champ magnétique principal évolue sur des échelles de temps très diverses allant de l'année jusqu'à la dizaine de millions d'années. A l'échelle des temps historiques, l'évolution du champ principal est généralement désigné sous le terme de variation séculaire. Cette variation séculaire est caractérisée à la fois par des changements soudains de tendance tels que les secousses géomagnétiques [voir p.ex. Courtillot et Le Mouél, 1984], et par des signaux continus plus lents tels que la dérive vers l'Ouest du champ et la décroissance du dipôle axial [voir p.ex. Jackson et Finlay, 2007]. A plus long terme, les enregistrements paléomagnétiques indiquent que le champ principal est essentiellement constitué d'un dipôle axial dont l'amplitude est comparable à celle du champ présent sauf pendant des courtes périodes de temps inférieures à 10 000 ans durant lesquelles le champ total est souvent dominé par les composantes multipolaires [voir p.ex. Valet, 2003]. Ces courtes périodes de temps sont en fait des périodes transitoires avant que le champ ne

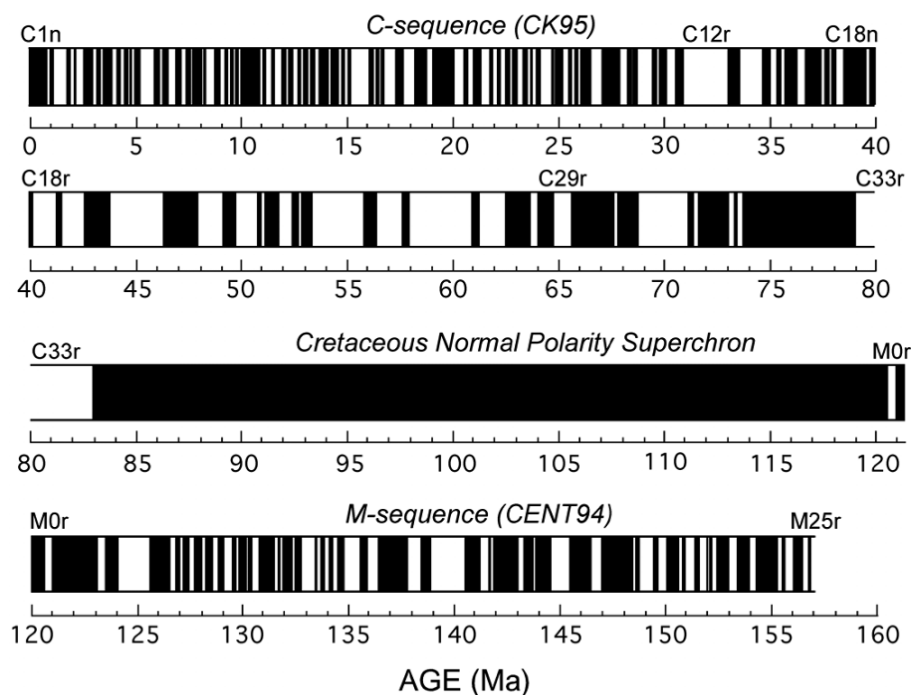


FIGURE 1.2 – Echelle composite des polarités géomagnétiques jusqu'à 160 millions d'années, d'après Lowrie et Kent [2004]. Cette échelle est essentiellement construite d'après les anomalies magnétiques du plancher océanique décrites dans Cande et Kent [1995] et Channell *et al.* [1995]. Les zones en noir correspondent aux polarités dites normales lorsque le champ pointe vers le Nord, tandis que les zones en blanc correspondent aux polarités dites inverses lorsque le champ pointe vers le Sud.

redevienne dipolaire, dénommées excursions lorsque le champ revient dans la même polarité, et inversions lorsque le champ inverse durablement sa polarité. L'échelle des polarités géomagnétiques reproduite à la figure 1.2 indique qu'au cours des derniers 160 millions d'années, le champ magnétique s'est généralement inversé après quelques centaines de milliers d'années, sauf durant la période du superchron de polarité normale du Crétacé. D'après la connaissance partielle que nous avons de la fréquence des inversions durant les 500 derniers millions d'années, deux autres superchrons auraient également existé : les superchrons de polarité inverse de Kiaman et Moyero [voir p.ex. Pavlov et Gallet, 2005].

1.2 Le noyau terrestre

1.2.1 Contraintes sismologiques

Depuis la suggestion de Wiechert (1897) selon laquelle l'intérieur de la Terre serait constitué d'un noyau métallique revêtu d'un manteau rocheux, la sismologie a permis de se donner une image affinée de la structure interne de la Terre. Oldham [1906] a été le premier à détecter la présence d'un noyau distinct en s'intéressant au retard des ondes sismiques lors de leur passage à travers la Terre. Gutenberg (1913) a ensuite localisé la profondeur de la frontière noyau-manteau (appelée aujourd'hui discontinuité de Gutenberg) à 2900 km, tandis que Jeffreys [1926] a mis en évidence la nature liquide du noyau par l'étude des phénomènes de marée. Lehmann (1936) a décelé l'existence d'un compartiment interne du noyau dans lequel les ondes sismiques se propagent plus rapidement, et dont la nature solide a été confirmée par la suite par l'examen des modes propres de vibration de la Terre [Dziewonski et Gilbert, 1971]. Depuis les modèles pionniers de Bullen [1940, 1942, 1950] décrivant la structure interne de la Terre, les données sismologiques se sont sensiblement accrues en qualité et en nombre, ce qui a permis la construction du modèle PREM² (Preliminary Reference Earth Model) par Dziewonski et Anderson [1981] à l'instigation de l'Association Internationale de Sismologie et de Physique de l'Intérieur de la Terre³ (A.I.S.P.I.T.). Par une inversion des temps d'arrivée des ondes de volume, ce modèle fournit les profils de vitesse des ondes de compression et cisaillement en fonction de la profondeur (voir table 1.1 pour quelques valeurs clef). Par une prise en compte additionnelle des modes propres de vibration de la Terre, ce modèle fournit également les profils de densité, pression et accélération de la pesanteur. Le modèle PREM travaille avec l'hypothèse forte d'une Terre radialement homogène. Les défis actuels de la sismologie globale sont d'étudier les écarts à ce modèle, notamment grâce aux méthodes de tomographie sismique [voir p.ex. Montagner, 2007, pour un article de synthèse].

²Même si des mises à jour ont été produites pour les profils de vitesse [Kennett et Engdahl, 1991, Kennett *et al.*, 1995], le modèle PREM reste dans la pratique le modèle de référence le plus couramment utilisé.

³Egalement dénommée « International Association of Seismology and Physics of the Earth's Interior » (IASP), cette association est l'un des sept constituants de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale (U.G.G.I.).

TABLE 1.1 – Valeurs du modèle PREM [Dziewonski et Anderson, 1981] décrivant les caractéristiques géométriques, sismiques et gravimétriques du manteau, du noyau fluide et de la graine. Ce modèle suppose une structure de la Terre en enveloppes concentriques tel que cela est illustré à la figure 1.1.

	rayon (km)	profondeur (km)	V_p (km·s ⁻¹)	V_s (km·s ⁻¹)	densité	pression (GPa)	gravité (m·s ⁻²)
manteau et croûte	6371	0	5,80	3,20	2,60	0	9,81
	3480	2891	13,72	7,26	5,57	140	10,70
	frontière noyau-manteau (discontinuité de Gutenberg)						
noyau fluide	3480	2891	8,06	0	9,90	140	10,7
	1221,5	5149,5	10,36	0	12,17	330	4,4
	frontière noyau fluide-graine (discontinuité de Lehmann)						
graine	1221,5	5149,5	10,36	3,50	12,17	330	4,4
	0	6371	11,26	3,67	13,09	360	0

1.2.2 Contraintes minéralogiques et géochimiques

Les travaux pionniers de Birch [1952, 1964] dans le domaine de la physique des hautes pressions et hautes températures ont démontré que le noyau de la Terre devait être principalement composé de fer, les silicates ne pouvant avoir la masse volumique prédite par la sismologie dans de telles conditions de pression et température. Jacobs [1953] a par ailleurs montré que l’augmentation du point de fusion du fer avec la pression devait conduire à un changement de phase du fer liquide vers le fer solide à la frontière noyau interne - noyau externe (également appelée discontinuité de Lehmann). L’étude approfondie des propriétés élastiques du fer et de ses alliages a ensuite permis de mettre en évidence la présence d’éléments légers dans une proportion de 5 à 15% dans le noyau fluide [voir p.ex. Poirier, 1994, pour un article de synthèse].

Parallèlement aux contraintes minéralogiques, la géochimie permet également d’apporter des contraintes fortes sur la composition du noyau. Les modèles géochimiques globaux s’appuient d’une part sur du matériel météoritique pour représenter la composition globale de la Terre, d’autre part sur des péridotites bien choisies pour représenter la composition du manteau supérieur. Moyennant des hypothèses, il est ensuite possible d’en déduire par différence la composition du noyau. Différentes approches sont possibles dans le choix du matériel météoritique. Le modèle d’Allègre *et al.* [1995] repose sur des chondrites carbonées, alors que le modèle de Javoy [1995] et sa révision récente [Javoy *et al.*, 2010] repose sur des chondrites à enstatite. Comme cela est illustré à la table 1.2, les deux modèles divergent sur la teneur exacte en fer du noyau, mais sont en accord sur la présence de nickel ainsi que d’éléments légers tels que le silicium et l’oxygène.

TABLE 1.2 – Composition chimique (en pourcentage de masse) de la Terre totale et du noyau d’après deux modèles géochimiques globaux élaborés par Allègre *et al.* [1995] et Javoy *et al.* [2010].

Eléments	Allègre <i>et al.</i> [1995]		Javoy <i>et al.</i> [2010]	
	Terre	Noyau	Terre	Noyau
O	32,44	4,10 ± 0,50	33,30 ± 6,35	1,99 ± 0,46
Fe	28,18	79,39 ± 2,00	28,30 ± 11,90	85,50 ± 1,14
Si	17,22	7,35	20,20 ± 3,75	6,64 ± 0,51
Mg	15,87	–	14,00 ± 3,28	–
Ni	1,61	4,87 ± 0,30	1,73 ± 1,07	5,35 ± 0,81
Ca	1,61	–	1,00 ± 0,35	–
Al	1,51	–	0,97 ± 0,33	–
Ti	0,07	–	0,06 ± 0,02	–
Cr	4,3·10 ⁻³	7,8·10 ⁻³	0,36 ± 0,38	0,55 ± 0,05
Co	0,9·10 ⁻³	2,5·10 ⁻³	0,08 ± 0,05	0,25 ± 0,03

1.2.3 Contraintes magnétiques et énergétiques

La première théorie sérieuse pour expliquer le champ magnétique terrestre fut formulée au début du dix-septième siècle par le savant anglais William Gilbert. Pour expliquer la propriété mystérieuse de l’aiguille de la boussole à pointer vers le Nord, celui-ci proposa dans son traité *De magnete* (1600) que la Terre soit elle-même un gros aimant⁴. A première vue séduisante, cette théorie s’achoppa cependant à deux difficultés majeures : elle était d’une part peu conciliable avec la variation séculaire du champ magnétique terrestre (mise en évidence par Henry Gellibrand et Edmund Halley dans le courant du dix-septième siècle) ; elle était d’autre part incompatible avec la loi de Curie (découverte à la fin du dix-neuvième siècle) qui stipule qu’un objet aimanté perd ses propriétés magnétiques au delà d’une certaine température qui n’excède généralement pas 600°C. En s’intéressant initialement aux taches solaires, Larmor [1919] proposa ainsi la théorie alternative des dynamos auto-entretenues selon laquelle un fluide conducteur en mouvement pourrait induire un champ magnétique. Cette théorie fut mise à rude épreuve par les théorèmes anti-dynamo de Cowling [1933] et la théorie alternative de Blackett [1947] qui suggérait un lien entre le moment magnétique et le moment cinétique d’un corps en rotation. Elle commença cependant à s’imposer grâce aux travaux pionniers d’Elsasser [1946a,b] qui formalisa l’existence de boucles de rétroactions dans le noyau fluide de la Terre, capables de maintenir un champ magnétique de grande échelle et d’expliquer les variations spatio-temporelles à différentes échelles du champ magnétique terrestre. Cette théorie fut ensuite améliorée par Bullard et Gellman [1954] qui utilisèrent des calculateurs pour démontrer la capacité de certains champs de vitesse à maintenir un champ magnétique.

⁴ « Magnus magnes ipse est globus terrestris. »

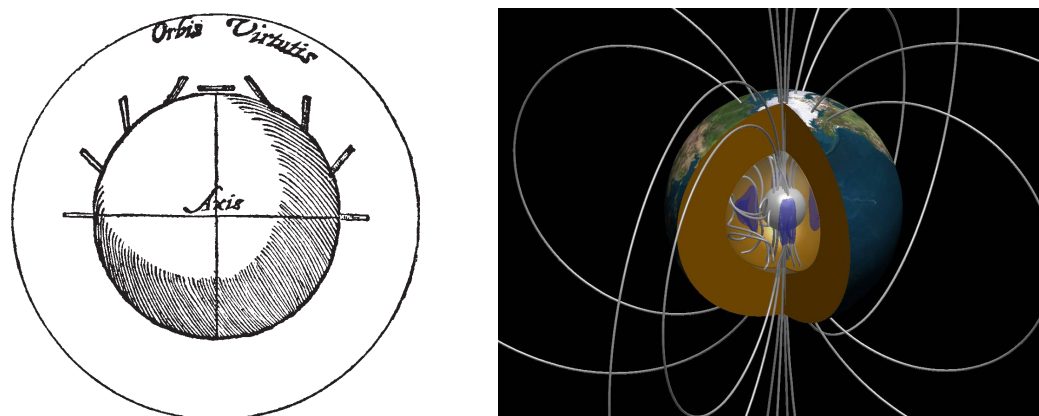


FIGURE 1.3 – Conceptions passées et actuelles de l’origine du champ magnétique terrestre : représentation à gauche de la Terre comme un gros aimant (d’après le *De magnete* de William Gilbert) ; représentation à droite du processus de géodynamo produit par les mouvements de convection dans le noyau fluide de la Terre (figure reproduite avec l’aimable autorisation de Julien Aubert).

L’effet dynamo peut schématiquement être visualisé comme le processus permettant la conversion d’énergie cinétique (provenant des mouvements de convection dans le noyau fluide) en énergie magnétique (permettant la génération d’un champ magnétique à grande échelle). Ceci nécessite naturellement l’existence d’une source d’énergie pérenne pour alimenter la convection. Cette source d’énergie pourrait soit provenir des mouvements de précession de l’axe de rotation de la Terre [voir p.ex. Tilgner, 2007, §8.07.3], soit de gradients de densité au sein du noyau fluide entre les discontinuités de Lehmann et Gutenberg [voir p.ex. Jones, 2007]. La convection pourrait dans ce dernier cas être thermique avec des gradients de température provenant soit du refroidissement séculaire de la Terre, soit de la chaleur latente de solidification provenant de la croissance de la graine, ou encore de la présence d’éléments radioactifs. La convection pourrait également être solutale avec des gradients de composition provenant de l’enrichissement de la base du noyau fluide en éléments légers lors de la solidification de la graine. La connaissance actuelle de la thermodynamique du noyau laisse penser que le moteur de la convection serait majoritairement d’origine thermo-solutale, avec une prédominance de l’origine solutale [voir p.ex. Lister, 2003, Aubert *et al.*, 2009].

1.3 La dynamo terrestre

1.3.1 Problématiques actuelles

Concernant le champ géomagnétique présent, la mise à disposition accrue de données par les satellites magnétiques permet de construire des modèles de champ affinés, dont l’un des défis actuels est de mieux contraindre l’accélération séculaire [voir p.ex. Lesur *et al.*, 2011, pour un article de

synthèse]. Cette démarche s'accompagne d'une aspiration à mieux comprendre les phénomènes rapides qui interviennent dans le noyau fluide, tels que les oscillations de torsion [voir p.ex. Gillet *et al.*, 2010a]. L'amélioration de la qualité des données permet également d'envisager l'utilisation de ces dernières dans une perspective d'assimilation des données : démarche visant au sens strict à récupérer des informations sur les composantes cachées de l'état de la géodynamo, et au sens large à utiliser des modèles dynamiques pour prédire l'état futur de la géodynamo et du champ magnétique à la surface de la Terre [voir p.ex. Fournier *et al.*, 2010, pour un article de synthèse]. Les prédictions du champ reposent actuellement sur des extrapolations linéaires de la variation séculaire pour les cinq années à venir, et la question naturelle qui se pose est de savoir s'il ne serait pas possible d'utiliser des méthodes plus élaborées reposant par exemple sur des modèles d'écoulement à la surface du noyau [Maus *et al.*, 2008, Beggan et Whaler, 2009], des modèles simplifiés judicieusement choisis de la dynamique du noyau [Fournier *et al.*, 2007, Canet *et al.*, 2009], ou des modèles simulant le problème complet de la géodynamo [Kuang *et al.*, 2008, 2009, 2010] avec les limitations que nous verrons dans la section suivante.

Concernant le champ magnétique passé, que l'on s'intéresse au champ des derniers millénaires, des derniers millions d'années, ou des périodes plus anciennes, le défi majeur est d'obtenir des bases de données plus complètes afin de combler les lacunes et d'obtenir des statistiques mieux convergées. Ces améliorations pourraient notamment permettre de parfaire la connaissance que nous avons de la paléovariation séculaire, de la phénoménologie des inversions, ou encore de la fréquence des inversions. Un point emblématique concerne par exemple l'élément déclencheur des superchrons pour lequel deux théories existent. Selon la première, les variations du flux de chaleur à la frontière noyau-manteau pourrait jouer un rôle crucial : un effet de couverture thermique du noyau pourrait momentanément faire chuter le flux de chaleur extrait, et diminuer ainsi drastiquement la fréquence des inversions [voir p.ex. Courtillot et Olson, 2007]. Selon la seconde théorie provenant d'un examen détaillé de l'évolution de la fréquence des inversions, la transition d'une période d'inversions fréquentes vers un superchron pourrait provenir d'une transition spontanée de la géodynamo [voir p.ex. Hulot et Gallet, 2003]. Une problématique similaire concerne l'occurrence des inversions et des excursions. Même si leurs mécanismes respectifs sont précisément décrits tant du côté des observateurs que des modélisateurs [voir p.ex. Amit *et al.*, 2010, pour un article de synthèse], leurs causes restent indécises. Le rôle respectif des conditions aux limites et de la nature non-linéaire de la géodynamo n'est par exemple pas encore clairement défini.

1.3.2 Approches possibles

Pour mieux comprendre les phénomènes physiques qui régissent le fonctionnement de la géodynamo, deux approches sont dans la pratique possibles en contrepoint de l'approche théorique : il s'agit des approches numériques et expérimentales. L'approche numérique a pris son envol il y a une quinzaine d'années avec les premières simulations modélisant le problème complet de la géodynamo en géométrie sphérique [Glatzmaier et Roberts, 1995a,b, Kageyama *et al.*, 1995]. Celles-ci ont montré par la suite leur capacité à reproduire dans certaines conditions certains

traits caractéristiques du champ magnétique terrestre, notamment en termes de morphologie du champ, variation séculaire et statistique des inversions [voir p.ex. Christensen et Wicht, 2007, pour un article de synthèse]. Pour des raisons de capacités de calcul limitées, elles ont cependant le gros inconvénient de travailler dans des régimes de paramètres éloignés de plusieurs ordres de grandeur de ceux de la Terre. Elles travaillent notamment avec une viscosité excessive de manière à éliminer les petites échelles non résolubles par les calculateurs actuels. L'approche expérimentale a quant à elle pris son envol il y a une dizaine d'années avec les dynamos de Riga [Gailitis *et al.*, 2000, 2001] et Karlsruhe [Stieglitz et Müller, 2001] qui ont montré leur capacité à produire un champ magnétique avec une dynamique temporelle simple en imposant un écoulement favorable. Quelques années plus tard, la dynamo expérimentale VKS (von Kármán Sodium) a montré sa capacité à produire des renversements de polarité présentant des analogies intéressantes avec les inversions du champ magnétique terrestre [Berhanu *et al.*, 2007]. Contrairement aux simulations numériques, les dynamos expérimentales travaillent avec des propriétés de transport proches de celles de la Terre. Elles ont cependant l'inconvénient de travailler avec une géométrie imposée de l'écoulement et de procéder à une mise en mouvement mécanique du fluide [voir p.ex. Cardin et Olson, 2007, pour un article de synthèse].

Nous travaillerons dans une bonne partie de ce mémoire sur des simulations numériques de la géodynamo. Grâce à une étude approfondie de l'espace des paramètres durant les dix dernières années, il a été possible de construire des lois d'échelle régissant l'évolution des grandeurs clef de la géodynamo [voir p.ex. Christensen et Aubert, 2006] et d'identifier les régimes de paramètres les plus pertinents d'un point de vue géophysique [voir p.ex. Christensen *et al.*, 2010]. Pour pallier les limitations intrinsèques des simulations numériques, à savoir leur utilisation dans un régime de paramètres éloigné de celui de la Terre, deux approches de contournement sont entre autres possibles. La première consiste à produire des lois d'échelle, opération visant à déterminer la dépendance d'une grandeur physique avec les paramètres de contrôle du système, pour ensuite extrapoler ladite grandeur, de l'espace des paramètres accessible numériquement vers l'espace des paramètres non accessible où se situe la dynamo terrestre. Cette approche est non seulement soucieuse de s'adapter au régime de paramètres inapproprié des simulations, mais permet également d'inférer des informations sur la nature du processus physique sous-jacent. Elle a cependant l'inconvénient d'être coûteuse puisqu'elle nécessite un maillage de l'espace des paramètres, c'est-à-dire le traitement simultané d'un grand nombre de simulations numériques qui correspondent chacune à un régime de paramètres distinct. Une seconde approche consiste à faire confiance à la connaissance que nous avons de l'espace des paramètres, à savoir supposer qu'un régime de paramètres est approprié pour l'étude d'un phénomène donné, aucun régime de paramètres ne pouvant prétendre reproduire toutes les caractéristiques à différentes échelles de la dynamo terrestre. Il est dans ce cas judicieux de se placer dans une vision statistique qui cherche à décrire le comportement « moyen » d'un phénomène plutôt que le détail de sa phénoménologie.

1.3.3 Objectifs de ce mémoire

Dans ce mémoire intitulé « variabilité et prédictibilité de la dynamo terrestre », nous nous attachons à caractériser la dynamique temporelle de la dynamo terrestre, principalement sur des échelles de temps séculaires (chapitre 3 et 4) dont la compréhension présente un intérêt tout particulier pour le domaine naissant de l'assimilation des données géomagnétiques, ainsi que sur des échelles de temps plus longues de l'ordre du million d'année (chapitre 5) dont la compréhension présente un intérêt pour une description approfondie du champ paléomagnétique.

Après un chapitre 2 essentiellement technique qui rappelle la manière usuelle de décrire et modéliser le champ magnétique principal, nous nous intéressons dans le chapitre 3 à l'étude des temps de corrélation (échelles de temps τ_n qui caractérisent l'évolution du champ pour un degré n donné de la décomposition en harmoniques sphériques) dans une approche comparative entre les données produites par les modèles de champ, et celles produites par des simulations numériques. Il s'agit d'un développement en français des résultats présentés dans la lettre « The geomagnetic secular-variation timescale in observations and numerical dynamo models » publiée à *Geophysical Research Letter* et reproduite dans l'annexe A de ce mémoire. Nous montrons dans ce chapitre la possibilité de décrire la décroissance des temps de corrélation τ_n avec le degré n d'une manière analogue pour les modèles de champ et les simulations numériques. Ceci s'effectue au moyen d'une loi simple comprenant un unique paramètre (le temps caractéristique τ_{SV} de la variation séculaire), et offre ainsi la possibilité de construire une passerelle entre les observations et les dynamos numériques.

En relation avec les premiers schémas d'assimilation des données géomagnétiques (voir section 1.3.1), nous nous intéressons dans le chapitre 4 à la détermination de la portée de prédictibilité de la géodynamo, à savoir combien de temps à l'avance une prédiction magnétique pourrait être raisonnablement effectuée. Il s'agit d'une reproduction intégrale de l'article de recherche « Earth's dynamo limit of predictability controlled by magnetic dissipation » accepté pour publication à *Geophysical Journal International*, et qui complète les résultats de la lettre « Earth's dynamo limit of predictability » publiée à *Geophysical Research Letter* et reproduite dans l'annexe B de ce mémoire. Nous utilisons la méthode dynamique empruntée à la météorologie [voir p.ex. Kalnay, 2002, Lorenz, 2006, pour des chapitres d'introduction] qui repose sur l'intégration numérique de solutions jumelles provenant de conditions initiales légèrement différentes, et l'étude de la croissance des erreurs induites. Nous travaillons dans une approche de lois d'échelle afin d'extrapoler au mieux le taux de croissance des erreurs aux conditions de la dynamo terrestre. Nous relierons dans un premier temps le temps caractéristique τ_e de croissance des erreurs avec le temps caractéristique τ_{SV} de la variation séculaire, et nous attachons ensuite à identifier sa cause intrinsèque, à savoir la dissipation magnétique des petites échelles des écoulements dans le noyau.

Dans le chapitre 5, nous nous intéressons à un aspect particulier de la variabilité à long terme du champ magnétique terrestre, à savoir la distribution de la durée des chrons. Contrairement aux chapitres précédents, il s'agit d'un chapitre exploratoire dans lequel nous exposons des résultats préliminaires et discutons la possibilité offerte, grâce à l'augmentation des capacités de calcul et une meilleure connaissance de l'espace des paramètres, d'utiliser des simulations numériques de la géodynamo dans une perspective de comparaison avec des données paléomagnétiques. Nous montrons qu'il est judicieux d'utiliser le temps caractéristique τ_{SV} de la variation séculaire pour remettre à l'échelle l'axe du temps de nos simulations, et nous penchons ensuite succinctement sur la question de l'existence d'une corrélation entre la durée des chrons et l'intensité moyenne du champ.

Chapitre 2

Description et modélisation du champ magnétique terrestre

Dans ce chapitre essentiellement technique auquel le lecteur pourra se référer par la suite, nous rappelons la manière de décrire et modéliser le champ magnétique principal. Nous nous intéressons tout d'abord à sa description mathématique en termes d'harmoniques sphériques. Nous exposons ensuite sa modélisation physique à l'aide des équations de la géodynamo. Nous décrivons finalement le code numérique utilisé dans les chapitres 3 à 5 de ce mémoire.

2.1 Description usuelle du champ magnétique terrestre¹

Plaçons nous dans le référentiel terrestre et utilisons le système des coordonnées sphériques (r, θ, φ) décrit à la figure 2.1a. Dans l'hypothèse d'un milieu isolant (absence de densités de charge) et non-magnétique (absence de densités de courant), le champ magnétique devient un champ laplacien qui peut s'exprimer sous la forme,

$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = -\nabla V(r, \theta, \varphi), \quad (2.1)$$

où $V(r, \theta, \varphi)$ est le potentiel magnétique scalaire. Ce potentiel se décompose plus précisément en

$$V(r, \theta, \varphi) = V_{\text{int}}(r, \theta, \varphi) + V_{\text{ext}}(r, \theta, \varphi), \quad (2.2)$$

où $V_{\text{int}}(r, \theta, \varphi)$ est le potentiel produit par les sources d'origine interne et $V_{\text{ext}}(r, \theta, \varphi)$ le potentiel produit par les sources d'origine externe.

¹Cette partie est inspirée du chapitre 8 de Blakely [1995]. Pour une description plus complète, le lecteur pourra se référer à Langel [1987].

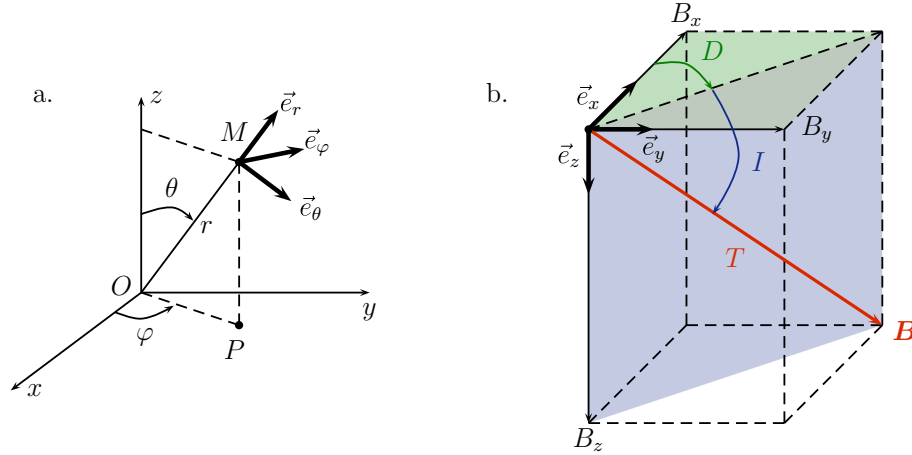


FIGURE 2.1 – (a) Système des coordonnées sphériques utilisé pour la description du champ magnétique en harmoniques sphériques ; (b) Description des éléments du champ magnétique en terme d'intensité totale T , d'inclinaison I (angle entre le plan horizontal et le champ magnétique) et de déclinaison D (azimut du méridien magnétique). Le plan en vert correspond à la surface de la Terre, et le plan en bleu correspond au méridien magnétique.

expression des potentiels scalaires Dans la base des harmoniques sphériques, les deux potentiels scalaires s'expriment

$$V_{\text{int}}(r, \theta, \varphi) = a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{m=n} [g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi)] P_n^m(\cos(\theta)) \quad (2.3)$$

$$V_{\text{ext}}(r, \theta, \varphi) = a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sum_{m=0}^{m=n} [q_n^m \cos(m\varphi) + s_n^m \sin(m\varphi)] P_n^m(\cos(\theta)) \quad (2.4)$$

où $a = 6371$ km est le rayon de référence de la Terre, n le degré harmonique, et m l'ordre azimuthal. Les fonctions P_n^m sont les polynômes associés de Legendre vérifiant la condition de normalisation de Schmidt², et les couples (g_n^m, h_n^m) et (q_n^m, s_n^m) constituent respectivement les coefficients de Gauss d'origine interne et ceux d'origine externe. Ces coefficients de Gauss ont la même unité que le champ magnétique et s'expriment généralement en nT ($= 10^{-9}$ T). Des exemples d'harmoniques sphériques sont représentés graphiquement à la figure 2.1 dans le cas du dipôle ($n = 1$), du quadripôle ($n = 2$), de l'octopôle ($n = 3$) et de l'hexadécapôle ($n = 4$).

expression du champ magnétique interne A partir des équations 2.1 et 2.3, on peut en déduire les expressions des différentes composantes du champ d'origine interne en coordonnées

²Les fonctions de Schmidt $P_n^m(\theta)$ sont reliés aux polynômes associés de Legendre $P_{n,m}(\theta)$ par les formules $P_n^m(\theta) = P_{n,m}(\theta)$ lorsque $m = 0$ et $P_n^m(\theta) = \sqrt{2(n-m)!/(n+m)!} \cdot P_{n,m}(\theta)$ lorsque $m > 0$.

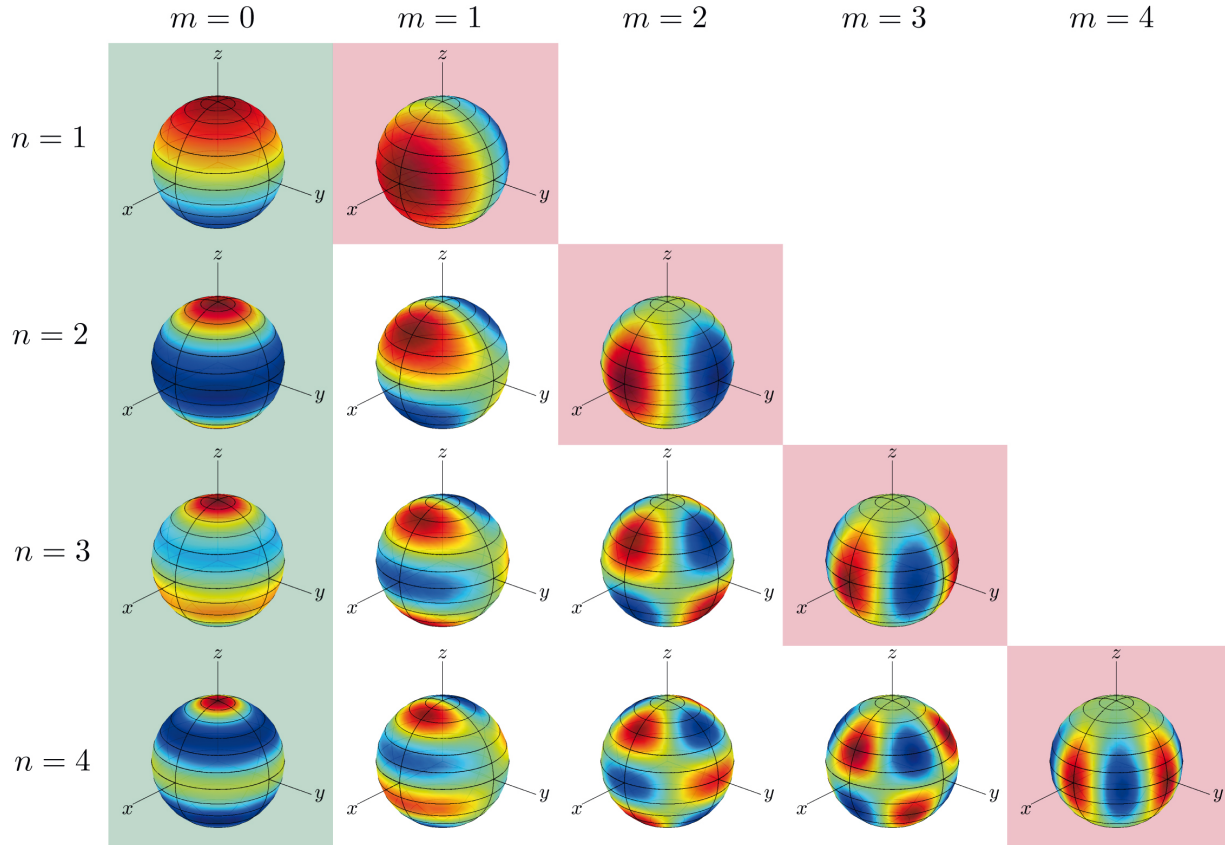


FIGURE 2.2 – Représentation de la partie réelle des harmoniques sphériques $Y_n^m = P_n^m(\cos(\theta))\exp(im\varphi)$ pour un degré n variant de 1 à 4. Le nombre m variant de 0 à n définit l'ordre azimutal. Les harmoniques Y_n^m s'annulent selon n cercles, ou plus exactement selon m cercles d'iso-longitude (méridien) et selon $n - m$ cercles d'iso-latitude (parallèle). Les harmoniques sont dites zonales lorsque $m = 0$ (fond vert), sectorielles lorsque $n = m$ (fond rouge), tessérales dans les autres cas (fond blanc).

sphériques :

$$B_r(r, \theta, \varphi) = + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^{m=n} [g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi)] P_n^m(\cos(\theta)) ; \quad (2.5)$$

$$B_\theta(r, \theta, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^{m=n} [g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi)] \frac{\partial P_n^m(\cos(\theta))}{\partial \theta} ; \quad (2.6)$$

$$B_\varphi(r, \theta, \varphi) = + \frac{1}{\sin(\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^{m=n} [mg_n^m \sin(m\varphi) - mh_n^m \cos(m\varphi)] P_n^m(\cos(\theta)). \quad (2.7)$$

éléments du champ géomagnétique Pour des raisons pratiques, on préfère souvent décrire le champ magnétique dans le référentiel des observatoires à la surface de la Terre. Comme cela est illustré à la figure 2.1b, ceci peut se faire au moyen des coordonnées cartésiennes ($B_x = -B_\theta$, $B_y = +B_\varphi$, $B_z = -B_r$) dans un système où x pointe vers le nord, y vers l'est, z vers le bas. On peut également choisir d'exprimer l'intensité totale,

$$T = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}, \quad (2.8)$$

accompagnée de deux angles, l'inclinaison et la déclinaison. L'inclinaison correspond à l'angle entre le plan horizontal et le vecteur de champ magnétique, à savoir

$$I = \arctan \frac{B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}. \quad (2.9)$$

Elle est par convention positive quand le vecteur de champ magnétique est incliné en dessous du plan horizontal, négative dans le cas contraire. La déclinaison correspond à l'azimut du méridien magnétique (i.e. le plan vertical contenant le vecteur de champ magnétique), à savoir

$$D = \arcsin \frac{B_y}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}. \quad (2.10)$$

Elle est comptée positivement vers l'est, négativement vers l'ouest. Les cartes de contours décrivant ces trois éléments sont appelés cartes isomagnétiques : cartes isodynamiques pour les contours d'égale intensité, cartes isoclines pour les contours d'égale inclinaison, cartes isogoniques pour les contours d'égale déclinaison.

expression du champ dipolaire En développant l'équation 2.3 jusqu'au degré $n = 1$ puis en passant en coordonnées cartésiennes, on obtient l'expression du potentiel du champ dipolaire

$$V_{\text{dip}} = \frac{a^3}{r^2} [g_1^0 \cos(\theta) + g_1^1 \cos(\varphi) \sin(\theta) + h_1^1 \sin(\varphi) \sin(\theta)] \quad (2.11)$$

$$= \frac{a^3}{r^2} \left[g_1^0 \frac{z}{r} + g_1^1 \frac{x}{r} + h_1^1 \frac{y}{r} \right]. \quad (2.12)$$

En effectuant l'analogie avec le potentiel d'un dipôle centré sur l'origine³,

$$V_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2} \left(m_x \frac{x}{r} + m_y \frac{y}{r} + m_z \frac{z}{r} \right), \quad (2.13)$$

on peut alors en déduire l'expression des trois composantes du moment dipolaire,

$$m_x = \frac{4\pi}{\mu_0} a^3 g_1^1 \quad (2.14)$$

$$m_y = \frac{4\pi}{\mu_0} a^3 h_1^1 \quad (2.15)$$

$$m_z = \frac{4\pi}{\mu_0} a^3 g_1^0, \quad (2.16)$$

ainsi que l'expression du moment dipolaire total

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} \quad (2.17)$$

qui s'exprime généralement en $\text{ZA} \cdot \text{m}^2$ ($= 10^{21} \text{A} \cdot \text{m}^2$).

spectres spatiaux en puissance Soit $\mathbf{B}(r, \theta, \varphi)$ le champ magnétique terrestre d'origine interne. Considérant le champ quadratique moyen observé à un rayon r à l'extérieur des sources,

$$W(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathbf{B}(r, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{B}(r, \theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (2.18)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n+4} \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right], \quad (2.19)$$

il est alors possible de définir pour chaque degré en harmoniques sphériques la grandeur

$$R_n(r) = (n+1) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n+4} \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right]. \quad (2.20)$$

Par analogie, on peut définir pour la dérivée première (variation séculaire) et la dérivée seconde (accélération séculaire) du champ magnétique les grandeurs

$$Q_n(r) = (n+1) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n+4} \sum_{m=0}^n \left[(\dot{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m)^2 \right], \quad (2.21)$$

$$S_n(r) = (n+1) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n+4} \sum_{m=0}^n \left[(\ddot{g}_n^m)^2 + (\ddot{h}_n^m)^2 \right], \quad (2.22)$$

³La grandeur $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^2$ correspond à la perméabilité du vide.

TABLE 2.1 – Coefficients de Gauss (exprimés en nT) du dipôle et du quadripôle à quelques époques, d’après les données des modèles IGRF. Moments dipolaires correspondants (exprimés en $\text{ZA} \cdot \text{m}^2$) : $m_{\text{ax}} = |m_z|$ pour le dipôle axial ; $m_{\text{eq}} = (m_x^2 + m_y^2)^{1/2}$ pour le dipôle équatorial ; $m = (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2)^{1/2}$ pour le dipôle total.

époque	g_1^0	g_1^1	h_1^1	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2	m_{ax}	m_{eq}	m
1900	-31543	-2298	5922	-677	2905	-1061	924	1121	81,6	16,4	83,2
1925	-30926	-2318	5817	-893	2969	-1334	1471	728	80,0	16,2	81,6
1950	-30554	-2250	5815	-1341	2998	-1810	1576	381	79,0	16,1	80,6
1975	-30100	-2013	5675	-1902	3010	-2067	1632	-68	77,8	15,6	79,4
2000	-29619	-1728	5186	-2268	3068	-2482	1671	-458	76,6	14,1	77,9
2005	-29555	-1669	5078	-2337	3048	-2595	1658	-515	76,4	13,8	77,7
2010	-29497	-1586	4945	-2397	3026	-2708	1669	-575	76,3	13,4	77,5

où les couples $(\dot{g}_n^m, \dot{h}_n^m)$ et $(\ddot{g}_n^m, \ddot{h}_n^m)$ correspondent respectivement aux dérivés temporelles premières et secondes des coefficients de Gauss. Les représentations graphiques de $R_n(r)$, $Q_n(r)$ et $S_n(r)$ en fonction de n sont appelées respectivement spectres spatiaux en puissance du champ statique, de la variation séculaire et l’accélération séculaire. A la surface de la Terre, ces représentations graphiques sont communément appelés spectres de Mauersberger-Lowes [voir p.ex. Lowes, 1974].

ordres de grandeur du champ présent Dans un travail de collaboration internationale, l’Association Internationale de Géomagnétisme et Aéronomie⁴ (A.I.G.A.) produit tous les cinq ans un modèle de référence nommé IGRF (International Geomagnetic Reference Field). Ce modèle se compose d’une part d’une description du champ statique (au moyen d’un jeu de coefficients de Gauss), d’autre part d’une prédiction de la variation séculaire pour les cinq années à venir (au moyen de la dérivée temporelle du jeu de coefficients de Gauss). Depuis la neuvième génération de l’IGRF [Macmillan *et al.*, 2003], les coefficients de Gauss définitifs sont fournis jusqu’au degré 13. Ils étaient auparavant fournis jusqu’au degré 10. En nous appuyant sur les modèles de l’IGRF-11 [Finlay *et al.*, 2010a], nous présentons à la table 2.1 les coefficients de Gauss du dipôle et du quadripôle à quelques époques depuis 1900. Pour nous donner une idée de la morphologie du champ actuel, nous représentons également à la figure 2.3 les composantes B_r , B_θ , B_φ ; et à la figure 2.4 l’intensité totale, l’inclinaison et la déclinaison.

⁴Egalement dénommée « International Association of Geomagnetism and Aeronomy » (IAGA), cette association est l’un des sept constituants de l’Union Géodésique et Géophysique Internationale (U.G.G.I.)

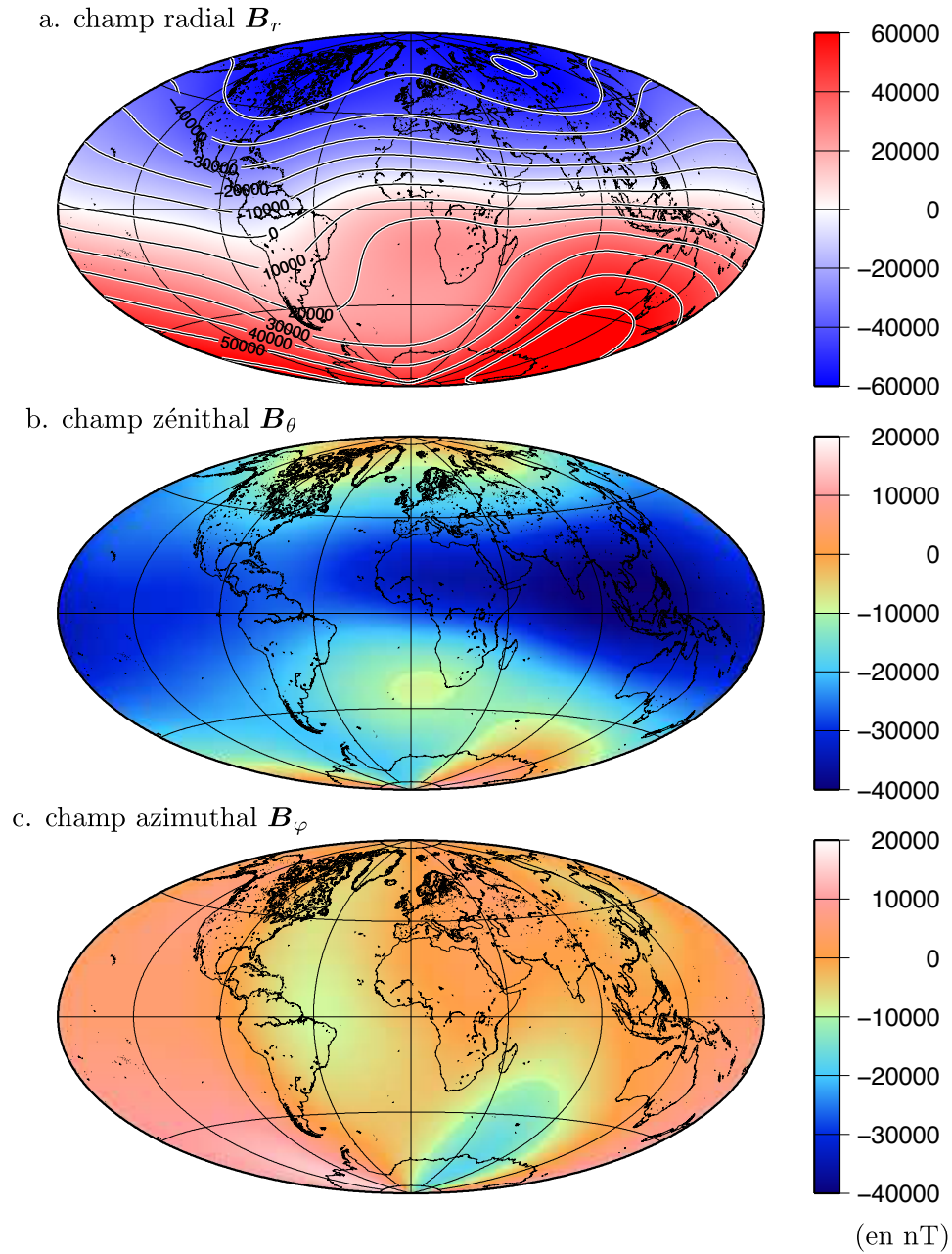


FIGURE 2.3 – Champ magnétique terrestre d’après les données de l’IGRF-11 pour l’époque 2010 : (a) composante radiale B_r ($= -B_z$) ; (b) composante latérale B_θ ($= -B_x$) ; (c) composante azimuthale B_φ ($= +B_y$).

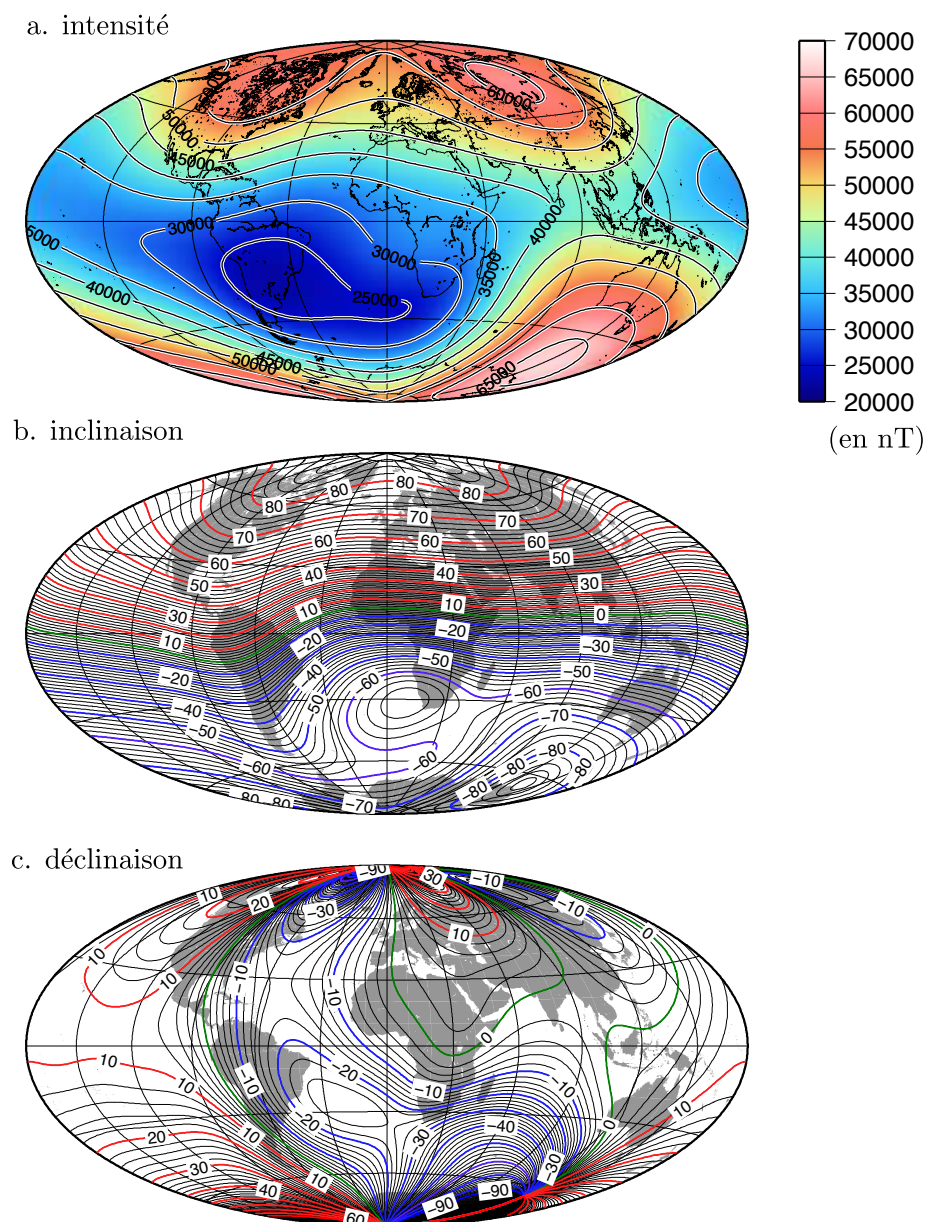


FIGURE 2.4 – Cartes isomagnétiques d’après les données de l’IGRF-11 pour l’époque 2010 : (a) carte isodynamique (ou d’égale intensité) ; (b) carte isoclinale (ou d’égale inclinaison) ; (c) carte isogonique (ou d’égale déclinaison).

2.2 Équations de la géodynamo

2.2.1 Équations dimensionnées⁵

Pour expliciter les équations de la géodynamo, nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq qui stipule que les effets de compressibilité (de l'ordre de 20% dans le noyau terrestre d'après le modèle PREM de Dziewonski et Anderson [1981]) sont négligeables sauf pour le cas particulier de la force d'Archimède dans l'équation de Navier-Stokes [voir p.ex. Gubbins et Roberts, 1987]. Les équations sont exprimées par rapport à un état de base adiabatique (ce qui équivaut à un état à isentropie constante) dans le cas de la convection thermique, et par rapport à un état de mélange parfait dans le cas d'une convection solutale.

équation de la continuité L'équation de la continuité traduit la conservation de la masse. Dans le cas d'un fluide incompressible, elle s'exprime simplement par la relation

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.23)$$

où $\mathbf{u}$ définit le champ de vitesse.

équation de transport (convection thermique) D'après le premier principe de la thermodynamique, la conservation de l'énergie interne e par unité de masse s'exprime

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_Q + S_Q, \quad (2.24)$$

où l'opérateur D/Dt représente la dérivée totale⁶, ρ la masse volumique du fluide, p le champ de pression, $\mathbf{j}_Q$ le vecteur de densité de flux de chaleur et S_Q les sources volumiques de chaleur. Comme on travaille par rapport à un état de base à isentropie constante, il est cependant plus commode de réexprimer l'équation 2.24 sous la forme

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_Q + S_Q, \quad (2.25)$$

où s correspond à l'entropie par unité de masse, et T au champ de température. Dans l'hypothèse d'un fluide isotrope, la loi de Fourier s'écrit simplement

$$\mathbf{j}_Q = -k_T \nabla T, \quad (2.26)$$

⁵Pour un développement approfondi des équations de géodynamo, le lecteur pourra par exemple se référer à Gubbins et Roberts [1987] et au chapitre 6 de Backus *et al.* [1996].

⁶La dérivée totale D/Dt est utilisée en description lagrangienne lorsqu'on suit une particule fluide dans son mouvement, par opposition à la dérivée partielle $\partial/\partial t$ utilisée en description eulérienne lorsqu'on observe les propriétés du fluide en un point donné. Les deux descriptions sont liées mathématiquement par la relation $D/Dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ où $\mathbf{u}$ correspond au champ de vitesse.

où k_T désigne la conductivité thermique du fluide. Si on ajoute l'hypothèse d'un fluide incompressible à chaleur spécifique constante c et suppose l'absence de sources volumiques de chaleur, l'équation 2.25 se transforme finalement en

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa_T \Delta T, \quad (2.27)$$

où $\kappa_T = k_T/(\rho_0 c)$ définit la diffusivité thermique (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).

équation de transport (convection solutale) L'équation de transport solutal traduit la conservation de la concentration ξ en éléments légers dans le fluide,

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \right] = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\xi + S_\xi, \quad (2.28)$$

où $\mathbf{j}_\xi$ représente le vecteur de densité de flux et S_ξ les sources volumiques en éléments légers. Dans l'hypothèse d'un fluide isotrope, la loi de Fick s'écrit simplement

$$\mathbf{j}_\xi = -k_\xi \nabla \xi, \quad (2.29)$$

où k_ξ désigne un coefficient de diffusion. En supposant l'absence de sources volumiques, l'équation de la conservation de la concentration en éléments légers s'exprime finalement

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \kappa_\xi \Delta \xi, \quad (2.30)$$

où $\kappa_\xi = k_\xi/\rho$ définit la diffusivité solutale (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).

équation de transport (cas mixte) Les effets de flottabilité d'origine thermique et solutale peuvent être traités de manière couplée au moyen du champ de « co-densité » (ou champ d'anomalie de masse volumique)

$$C = \rho_0(\alpha T + \beta \xi), \quad (2.31)$$

où α correspond au coefficient de dilatation thermique, β à la différence de densité entre les éléments légers qui contribuent à la convection et le fer pur. Comme il est raisonnable de penser que les champs T et ξ acquièrent la même diffusivité κ du fait du mélange turbulent à l'intérieur du noyau [voir p.ex. Braginsky et Roberts, 1995], l'équation de transport s'exprime finalement

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = \kappa \Delta C + S, \quad (2.32)$$

où S est un terme de source volumique.

équation du mouvement L'équation du mouvement traduit la conservation de la quantité de mouvement. On se place tout d'abord dans le cadre de l'approximation du fluide newtonien qui stipule qu'il existe une relation linéaire entre le tenseur des contraintes σ_{ij} et le tenseur des déformations ε_{ij} :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{\ell\ell}\delta_{ij} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad (2.33)$$

où p définit la pression dynamique, λ et μ les coefficients de viscosité. Dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation de Navier-Stokes s'exprime alors par la relation

$$\rho_0(\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i) = -\partial_i p + \mu \Delta u_i + f_i, \quad (2.34)$$

où ρ_0 définit la masse volumique du fluide. En explicitant les interactions externes regroupées sous le terme f_i — la force d'Archimède (qui représente les effets de flottabilité dans le cadre de l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq), la force de Laplace (qui représente les effets magnétiques) et l'accélération de Coriolis (qui représente les effets de rotation) — on obtient l'équation du mouvement suivante,

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P + \rho_0 \nu \Delta \mathbf{u} + C \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - 2\rho_0 (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}), \quad (2.35)$$

où $\nu = \mu/\rho_0$ définit la viscosité cinématique (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$), C la co-densité, μ_0 la perméabilité magnétique. Le terme de gradient $-\nabla P$ regroupe le gradient de pression ainsi que le potentiel centrifuge.

équation de l'induction Soit un conducteur linéaire isotrope. On se place dans le cadre de l'approximation de la magnétohydrodynamique (absence de courants de déplacement). En l'absence de phénomènes d'aimantation, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\varepsilon & (\text{Maxwell-Gauss}) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} & (\text{Maxwell-Faraday}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & (\text{Maxwell-Flux}) \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} & (\text{Maxwell-Ampère}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dans le cas d'un milieu animé d'une vitesse $\mathbf{u}$, la loi d'Ohm s'exprime par la relation

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.37)$$

En prenant le rotationnel de l'équation d'Ampère et en utilisant les équations de Gauss et Faraday, on obtient finalement l'équation de l'induction,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \quad (2.38)$$

où $\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$ définit la diffusivité magnétique (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$). N'ayant pas utilisée la condition solénoïdale

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.39)$$

elle doit être conservée dans le jeu d'équations.

bilan des équations Considérant le champ de vitesse $\mathbf{u}$, le champ magnétique $\mathbf{B}$ et le champ de co-densité C , les équations dimensionnés de la géodynamo sont les suivantes :

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 ;$	(2.40)
$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P + \rho_0 \nu \Delta \mathbf{u} + C \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - 2\rho_0 (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) ;$	(2.41)
$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = \kappa \Delta C + S ;$	(2.42)
$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} ;$	(2.43)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$	(2.44)

Parallèlement à ce jeu d'équations, trois conditions aux limites doivent être prises en compte : une condition cinématique, une condition magnétique, et une condition sur l'anomalie de densité. La condition cinématique implique un déplacement nul au niveau des interfaces. La condition magnétique est imposée par un milieu électrique isolant aux deux interfaces dans le cas d'une graine isolante. Lorsque la graine est conductrice, l'équation de l'induction doit être intégrée jusqu'au centre du modèle. La condition sur la co-densité est quant à elle dépendante du moteur de la convection comme nous le verrons ci-dessous.

2.2.2 Adimensionnements usuels

Soit un fluide conducteur situé à l'intérieur d'une coquille (de rayon interne r_i , de rayon externe r_o , de rapport d'aspect $\chi = r_i/r_o = 0.35$) en rotation par rapport à l'axe $\mathbf{e}_z$ avec une vitesse angulaire Ω constante. Cette coquille correspond au noyau externe de la Terre.

Adimensionnement (1) en fonction du temps de diffusion de la quantité de mouvement [voir p.ex. Christensen *et al.*, 2001]

On choisit l'échelle de longueur caractéristique $D = r_o - r_i$ qui est égale à l'épaisseur de la coquille, et l'échelle de temps caractéristique D^2/ν qui est égale au temps de diffusion de la quantité de mouvement. On choisit également $(\rho_0 \mu_0 \eta \Omega)^{1/2}$ pour échelle caractéristique du champ magnétique, et $[C]$ pour échelle caractéristique du champ de co-densité. Ayant posé ces quatre échelles caractéristiques, on peut en déduire la vitesse caractéristique ν/D , et la pression caractéristique $\rho_0 \nu \Omega$ en supposant l'équilibre entre les forces de pression et de Laplace. Adimensionnant de la sorte les équations 2.40 à 2.44, on en déduit les équations adimensionnées :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 ; & (2.45) \\ E \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} \right] + 2\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} + \nabla P &= Ra \frac{\mathbf{r}}{r_0} C + \frac{1}{Pm} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} ; & (2.46) \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C &= \frac{1}{Pr} \Delta C + S ; & (2.47) \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Pm} \Delta \mathbf{B} ; & (2.48) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. & (2.49) \end{aligned}$$

Les quatre paramètres sans dimension sont le nombre d'Ekman (qui mesure l'importance relative des forces de viscosité par rapport à l'accélération de Coriolis),

$$E = \frac{\nu}{\Omega D^2}, \quad (2.50)$$

le nombre de Prandtl hydrodynamique (qui est égal au rapport de la viscosité cinématique sur la diffusivité thermique)

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (2.51)$$

le nombre de Prandtl magnétique (qui est égal au rapport de la viscosité cinématique sur la diffusivité thermique)

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} \quad (2.52)$$

et le nombre de Rayleigh (qui mesure la vigueur avec laquelle la dynamo est entraînée)

$$Ra = \frac{g_0 [C] D}{\Omega \nu}. \quad (2.53)$$

Dans le cas d'une convection purement thermique, on considère une température T_0 à la frontière interne de la coquille et une température $T_0 + \Delta T$ à la frontière externe. Le champ de co-densité s'adimensionne alors par $\alpha \Delta T$, où α est le coefficient de dilatation thermique. Ceci conduit au nombre de Rayleigh thermique⁷ [Christensen *et al.*, 2001]

$$Ra_T = \frac{\alpha g_0 \Delta T D}{\Omega \nu}. \quad (2.54)$$

Dans le cas d'une convection purement solutale où on considère un flux fixe en éléments légers à la frontière interne et un flux nul à la frontière externe, ceci revient à considérer une source volumique S négative dans l'équation 2.47, et le champ de co-densité s'adimensionne par $|S|/\Omega$. Ceci conduit au nombre de Rayleigh solutal [Aubert *et al.*, 2008b]

$$Ra_\xi = \frac{g_0 |S| D}{\Omega^2 \nu}. \quad (2.55)$$

⁷Contrairement à la convection de Rayleigh-Bénard où le nombre de Rayleigh $\overline{Ra}_T = (\alpha g_0 \Delta T D^2)/(\kappa \nu)$ décrit le rapport des forces de poussée sur les forces visqueuses, le nombre de Rayleigh formulé ici fait intervenir l'accélération de Coriolis. La relation de passage entre ces deux formulations est $Ra_T = \overline{Ra}_T E Pr^{-1}$.

Adimensionnement (2) en fonction du temps de rotation [voir p.ex. Christensen et Aubert, 2006]

On travaille comme précédemment avec la longueur caractéristique $D = r_o - r_i$ qui est égale à l'épaisseur de la coquille. On choisit en revanche d'adimensionner le temps par Ω^{-1} qui est l'inverse de la vitesse angulaire de la coquille. On obtient ainsi la vitesse caractéristique ΩD . En supposant des équilibres avec le terme de Coriolis, on peut également en déduire le champ magnétique caractéristique $(\rho_0 \mu_0)^{1/2} \Omega D$ et la pression caractéristique $\rho_0 \Omega^2 D^2$. Adimensionnant ainsi les équation 2.40 à 2.44, on en déduit les équations adimensionnées :

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 ;$	(2.56)
$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\hat{z} \times \mathbf{u} + \nabla P = E \Delta \mathbf{u} + Ra^* \frac{\mathbf{r}}{r_0} C + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} ;$	(2.57)
$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = \frac{E}{Pr} \Delta C + S ;$	(2.58)
$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{E}{Pm} \Delta \mathbf{B} ;$	(2.59)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$	(2.60)

Les nombres d'Ekman, de Prandtl et de Prandtl magnétique demeurent identiques à ceux déterminés dans l'adimensionnement précédent. Le nombre de Rayleigh s'exprime en revanche par la relation

$$Ra^* = \frac{g_0 [C]}{\Omega^2 D}, \quad (2.61)$$

et vaut par exemple

$$Ra_T^* = \frac{\alpha g_0 \Delta T}{\Omega^2 D} \quad (2.62)$$

dans le cas d'une convection thermique gouvernée par une différence de température ΔT entre la frontière interne et la frontière externe de la coquille [Christensen et Aubert, 2006]. Le passage entre le nombre de Rayleigh de l'adimensionnement (1) et celui de l'adimensionnement (2) s'effectue simplement par la relation

$$Ra^* = Ra \cdot E. \quad (2.63)$$

Valeurs des paramètres de contrôle

Connaissant des estimations de la diffusivité du fer dans les conditions du noyau (se reporter à la table 2.2), il est tout d'abord possible de déduire des estimations des nombres de Prandtl : $Pr \approx 10^{-2}$ et $Pm \approx 10^{-6}$. En prenant une vitesse angulaire $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, on peut également en déduire une estimation du nombre d'Ekman : $E \approx 3 \times 10^{-15}$. L'estimation du nombre de Rayleigh est plus délicate et peut par exemple s'effectuer en utilisant des lois d'échelles qui relient la

TABLE 2.2 – Valeurs de quelques paramètres physiques du noyau fluide de la Terre.

notation	signification	valeur	référence
r_i	rayon de la frontière interne	1220×10^3 m	Dziewonski et Anderson [1981]
r_o	rayon de la frontière externe	3480×10^3 m	Dziewonski et Anderson [1981]
D	épaisseur de la coquille	2260×10^3 m	Dziewonski et Anderson [1981]
ρ_0	masse volumique	$1,2 \times 10^4$ kg	Dziewonski et Anderson [1981]
ν	viscosité cinématique	$1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	de Wijs <i>et al.</i> [1998]
κ	diffusivité thermique	$5 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	Stacey et Loper [2007]
η	diffusivité magnétique	$1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	Secco et Schloessin [1989]

vitesse quadratique moyenne au flux de poussée [voir p.ex. Christensen et Aubert, 2006, §5.1] : ceci conduit généralement à des valeurs $Ra \approx 10^9$ et $Ra^* \approx 10^{-5}$.

2.2.3 Grandeurs sans dimension

Vitesse et champ magnétique adimensionnés

Dans le cas de l'adimensionnement (1) en fonction du temps de diffusion de la quantité de mouvement, la vitesse adimensionnée est mesurée par le nombre de Reynolds hydrodynamique

$$Re = \frac{U_0 D}{\nu} \quad (2.64)$$

et le champ magnétique adimensionné par la racine carrée du nombre d'Elsasser

$$\Lambda = \frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0 \eta \Omega}, \quad (2.65)$$

où U_0 et B_0 désignent respectivement les valeurs caractéristiques dimensionnés de la vitesse et du champ magnétique. Dans le cas de l'adimensionnement (2) en fonction de la fréquence de rotation, la vitesse adimensionnée est quantifiée par le nombre de Rossby⁸

$$R_0 = \frac{U_0}{\Omega D} \quad (2.66)$$

et le champ magnétique adimensionné par le nombre de Lehnert⁹

$$Le = \frac{B_0}{\Omega D (\rho_0 \mu_0)^{1/2}}. \quad (2.67)$$

⁸La relation entre le nombre de Rossby et le nombre de Reynolds est donnée par $R_0 = Re \cdot E$.

⁹Ce nombre, également nommé nombre de Lorentz [Christensen et Aubert, 2006, Christensen, 2010], a été formulé pour la première fois par Lehnert [1954]. La relation entre le nombre de Lehnert et le nombre d'Elsasser est donnée par $\Lambda = Le^2 \cdot Pm \cdot E^{-1}$.

En faisant intervenir les nombres de Prandtl hydrodynamique Pr et le nombre de Prandtl magnétique Pm , notons qu'il est également possible de définir à partir du nombre de Reynolds hydrodynamique Re le nombre de Reynolds magnétique

$$Rm = Re \cdot Pm = \frac{U_0 D}{\eta} \quad (2.68)$$

qui quantifie la turbulence magnétique du fluide, et le nombre de Péclet

$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{U_0 D}{\kappa} \quad (2.69)$$

qui quantifie la turbulence thermique du fluide.

Temps caractéristiques

Dans les deux adimensionnements présentés précédemment, le temps de diffusion de la quantité de mouvement

$$\tau_\nu = D^2/\nu \quad (2.70)$$

et le temps de rotation

$$\tau_\Omega = \Omega^{-1} \quad (2.71)$$

constituaient les deux échelles de temps caractéristiques¹⁰. En fonction du problème étudié, il est parfois utile de définir d'autres temps caractéristiques, comme par exemple le temps de diffusion magnétique¹¹

$$\tau_\eta = D^2/\eta, \quad (2.72)$$

et le temps de retournement des vortex

$$\tau_U = D/U_0. \quad (2.73)$$

Il est également courant de travailler avec le temps de décroissance du dipôle¹²

$$\tau_{\text{dip}} = r_0^2/(\pi^2 \eta). \quad (2.74)$$

Nous discuterons dans le chapitre 5 de la pertinence de l'utilisation de ces temps.

¹⁰La relation entre ces deux échelles de temps caractéristique est $\tau_\Omega = E \cdot \tau_\nu$.

¹¹Notons que par analogie il serait également possible de définir de temps de diffusion thermique $\tau_\kappa = D^2/\kappa$.

¹²La relation de passage avec le temps de diffusion magnétique est $\tau_{\text{dip}} = \pi^{-2} \cdot (1 - \chi)^{-2} \cdot \tau_\eta$, où $\chi = 0.35$ est le rapport d'aspect de la coquille correspondant au noyau fluide.

2.3 Modèles numériques de géodynamo

2.3.1 Considérations physiques

Nous utilisons dans cette thèse une ramification du code « PARODY » [Aubert *et al.*, 2008b], initialement développé par Emmanuel Dormy et Julien Aubert, qui résout le problème complet de la magnétohydrodynamique dans un fluide en rotation rapide. Ce code, qui a été testé par comparaison avec d'autres implémentations usuelles [Christensen *et al.*, 2001], repose sur une méthode semi-spectrale, dont les caractéristiques principales sont détaillées ci-dessous¹³.

Les champs vectoriels $\mathbf{u}$ et $\mathbf{B}$ sont tout d'abord décomposés en

$$\mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}u_p) + \nabla \times (\mathbf{r}u_t) \quad (2.75)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}B_p) + \nabla \times (\mathbf{r}B_t) \quad (2.76)$$

où les indices p correspondent aux potentiels poloidaux, et les indices t aux potentiels toroïdaux. Les potentiels scalaires u_t , u_p , B_p et B_t ainsi que le champ de co-densité C sont ensuite projetés sur la base des harmoniques sphériques Y_n^m , tels que

$$X(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n x_n^m(r, t) \cdot Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.77)$$

où x_n^m correspond au potentiel complexe de degré n et d'ordre m de la décomposition en harmoniques sphériques¹⁴. Alors que la dépendance latérale est naturellement traitée par la décomposition en harmoniques sphériques, la dépendance radiale est prise en compte par un schéma de différences finies du second ordre (avec une progression géométrique vers les frontières pour résoudre les couches limite). L'intégration temporelle est quant à elle effectuée au moyen d'un schéma implicite de Crank-Nicolson pour les termes diffusifs, et d'un schéma explicite d'Adams-Bashforth pour les autres termes [voir p.ex. Canuto *et al.*, 2006, §D2 pour plus de détails sur ces deux schémas d'intégration temporelle]. Les pas de temps sont déterminés selon un critère adaptatif de manière à assurer la stabilité de l'algorithme d'intégration numérique tout en optimisant le temps de calcul [voir p.ex. Christensen *et al.*, 1999, §2.2].

¹³Le lecteur pourra se référer au mémoire de Dormy [1997] pour plus de détails.

¹⁴Les harmoniques sphériques $Y_n^m(\theta, \varphi) = C_n^m P_{n,m}(\theta) \exp(im\varphi)$ sont définies avec un facteur de normalisation $C_n^m = \sqrt{(2 - \delta_{m0})(2n+1)(n-m)!/(n+m)!}$, où δ_{ij} correspond au symbole de Kronecker et $P_{n,m}(\theta)$ aux polynômes associés de Legendre en l'absence de normalisation. Ces harmoniques sphériques doivent donc être divisées par $\sqrt{2n+1}$ pour passer en normalisation de Schmidt.

2.3.2 Considérations pratiques

La parallélisation du code est constituée de deux couches successives : une première couche dans la dimension radiale en utilisant MPI¹⁵, une seconde couche dans la dimension latérale en utilisant OpenMP¹⁶. Il est bénéfique d'activer cette seconde couche de parallélisme uniquement pour les calculs nécessitant une forte résolution spectrale. Les calculs présentés dans ce mémoire ont majoritairement été effectués au service de calcul parallèle (S-CAPAD) de l'I.P.G.P. doté d'un cluster constitué de 64 serveurs IBMx3550, avec chacun une mémoire vive de 8 Go et 2 processeurs quadri-cœur Intel Xeon 5420 fonctionnant à une fréquence de 2,5 GHz. Une partie des calculs a également été effectuée sur des machines propres de l'équipe de géomagnétisme : 3 serveurs avec une mémoire vive de 16 Go, et dotés chacun de 2 processeurs quadri-cœur Intel Xeon 5450 fonctionnant à une fréquence de 3 GHz.

¹⁵Message Passing Interface : interface de communication pour le calcul parallèle sur architecture à mémoire distribuée.

¹⁶Open Multi-Processing : interface de communication pour le calcul parallèle sur architecture à mémoire partagée.

Chapitre 3

Temps de corrélation du champ magnétique terrestre¹

La connaissance des spectres spatiaux en puissance du champ magnétique principal et de sa variation séculaire permettent de définir des temps caractéristiques τ_n pour chaque degré n de la décomposition en harmoniques sphériques. Confrontant observations et modèles numériques de la géodynamo, nous montrons qu'une loi linéaire inverse $\tau_n = \tau_{SV}/n$ pour le champ non dipolaire (par opposition avec une loi puissance plus sophistiquée de la forme $\tau_n = \delta \times n^{-\gamma}$) est bien appropriée pour décrire la décroissance des τ_n avec n , et de plus compatible avec les fluctuations naturelles prédites pour les τ_n . L'unique paramètre définissant la loi linéaire inverse (le temps caractéristique de la variation séculaire) pourrait constituer un outil élégant et efficace pour remettre à l'échelle l'axe du temps d'une simulation dynamo, soit dans une perspective d'assimilation des données géomagnétiques, soit dans une perspective de comparaison avec des données paléomagnétiques.

3.1 Introduction

3.1.1 Définition des temps de corrélation

Considérant les spectres spatiaux en puissance, à la surface de la Terre, du champ statique²

$$R_n = (n + 1) \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right] \quad (3.1)$$

¹Ce chapitre est un développement en français de la lettre « The geomagnetic secular-variation timescale in observations and numerical dynamo models » publié à *Geophysical Research Letter* et reproduite dans l'annexe A de ce mémoire.

²L'expression, initialement formulée par Mauersberger [1956] et Lucke [1957], a ensuite été reprise et vulgarisée par Lowes [1966, 1974] et Langel et Estes [1982].

et de la variation séculaire³

$$Q_n = (n + 1) \sum_{m=0}^n [(\dot{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m)^2], \quad (3.2)$$

il est possible de définir pour chaque degré n en harmoniques sphériques les échelles de temps caractéristiques [voir p.ex. Stacey, 1992]

$$\tau_n = \sqrt{\frac{R_n}{Q_n}} = \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^n [(\dot{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m)^2]}{\sum_{m=0}^n [(\dot{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m)^2]}}. \quad (3.3)$$

Cette quantité, définie ici à partir des spectres en puissance à la surface de la Terre (Eqs. 3.1 et 3.2), peut en pratique également être définie à partir des spectres en puissance à n'importe quel rayon r à l'extérieur des sources (Eqs. 2.20 et 2.21), puisque le rapport de $R_n(r)$ par $Q_n(r)$ fait disparaître la dépendance au rayon sphérique. Des échelles de temps caractéristiques,

$$\tau_n^* = \sqrt{\frac{\langle R_n \rangle}{\langle Q_n \rangle}} = \sqrt{\frac{\langle \sum_{m=0}^n [(\dot{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m)^2] \rangle}{\langle \sum_{m=0}^n [(\dot{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m)^2] \rangle}}, \quad (3.4)$$

peuvent également être définis à partir des spectres moyens [Christensen et Tilgner, 2004], où les crochets $\langle \rangle$ définissent la moyenne temporelle. Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l'étude de ces échelles de temps caractéristiques τ_n et τ_n^* , et montrerons la compatibilité qu'il existe entre ces deux grandeurs.

3.1.2 Interprétation des temps de corrélation

En fonction de l'interprétation qui leur est donnée, ces temps caractéristiques τ_n peuvent être désignés de différentes manières. Sous l'appellation de « temps de réorganisation », Stacey [1992] leur donne une interprétation phénoménologique [voir également Stacey et Davis, 2008, p. 398-399], en suggérant que les contributions harmoniques de degré n du champ magnétique terrestre seraient induites par des boucles de courant à l'intérieur du noyau, et que les temps de corrélation τ_n seraient précisément reliés à la dimension de ces boucles. Quoique simple et séduisante, cette interprétation demeure néanmoins spéculative puisqu'elle ne repose en aucune manière sur ce que nous connaissons de la dynamique turbulente du noyau. Sous l'appellation de « temps de persistance », De Santis *et al.* [2003] propose également une interprétation phénoménologique, en suggérant que, par analogie avec la dynamique océanique, la dynamique du noyau pourrait être schématiquement modélisée par l'apparition de vortex isolés de taille distincte et dont les échelles de temps persisteraient avant que les vortex de grande taille n'englobent ceux de plus petite taille. Par rapport à Stacey [1992], cette interprétation a l'avantage de considérer

³ Cette expression a initialement été utilisée par Lowes [1974] et Alldredge [1984]. Voir Meyer [1986], Alldredge [1986] et Nevanlinna [1987] pour des définitions alternatives possibles du spectre de la variation séculaire.

une dynamique turbulente, mais rien n'indique cependant qu'elle soit appropriée pour expliquer la dynamique du noyau. Sous l'appellation de « temps de corrélation », Hulot et Le Mouél [1994] proposent finalement une interprétation statistique. Cette interprétation ne renie pas l'existence de processus déterministes (advection ou diffusion) à l'origine des phénomènes physiques. Elle s'appuie cependant sur l'hypothèse que les phénomènes physiques en présence sont suffisamment complexes pour être analysés à l'aide d'outils statistiques. Les temps de corrélation τ_n sont dans ce cas interprétés comme une mesure « moyenne » du temps nécessaire pour que le champ magnétique de degré n soit complètement renouvelé. Nous reposerons sur cette interprétation dans la suite de ce chapitre.

3.1.3 Style de décroissance des temps de corrélation

Il est largement reconnu que les temps de corrélation τ_n décroissent lorsque le degré n en harmoniques sphériques augmente. Le style exact de cette décroissance reste cependant sujet à débat. Pour décrire l'évolution de τ_n en fonction de n , Holme et Olsen [2005] ont montré qu'une loi puissance de la forme $\tau_n = \delta \times n^{-\gamma}$ était mieux appropriée qu'une loi exponentielle de la forme $\tau_n = \alpha \times \exp(-\beta n)$. Utilisant des modèles contemporains de champ reposant sur des données satellitaires et d'observatoires, des valeurs de l'exposant γ entre 1,35 et 1,45 ont ensuite été proposées [Holme et Olsen, 2006, Olsen *et al.*, 2006, Lesur *et al.*, 2008]. Il tient cependant d'être prudent sur la valeur exacte de cet exposant, qui est à la fois sensible à la gamme d'harmoniques sphériques choisie pour l'ajustement (par exemple au fait d'inclure ou de ne pas inclure les composantes dipôle et quadripôle) et au choix du modèle (en particulier de l'année sur laquelle sont évalués les spectres). A partir de données issues de dynamos numériques, Christensen et Tilgner [2004] ont proposé quant à eux une loi plus simple de la forme $\tau_n = \tau_{SV}/n$, où τ_{SV} est appelé « échelle caractéristique de la variation séculaire ». Cette loi est en fait un cas particulier de la loi puissance $\tau_n = \delta \times n^{-\gamma}$ lorsque l'exposant γ vaut 1. Nous montrerons par la suite dans quelle mesure cette loi est également applicable aux temps de corrélation issus des modèles de champ. En nous plaçant dans l'interprétation statistique de Hulot et Le Mouél [1994], nous montrerons plus exactement dans quelle mesure cette loi linéaire inverse est compatible avec les fluctuations naturelles des temps de corrélation τ_n .

3.2 Modèles étudiés

3.2.1 Modèles de champ géomagnétique

Dans ce chapitre, nous utilisons tout d'abord le modèle *gufm1* [Jackson *et al.*, 2000] qui décrit le champ magnétique à la frontière noyau-manteau pour l'intervalle de temps 1590-1990. Il est construit à partir d'une importante compilation de données de navigation (mesures de la déclinaison magnétique) ainsi que de données d'observatoire disponibles à partir de 1840. Nous nous limitons ici à travailler sur la partie contemporaine (1840-1990) de ce modèle sur laquelle les

effets de la régularisation temporelle sur les hauts degrés (typiquement $n \geq 5$) sont moins marqués que durant la période antérieure. Nous utilisons également le modèle CM4 [Sabaka *et al.*, 2004] qui décrit simultanément les champs d'origine profonde, crustale, ionosphérique et magnétosphérique pour la période 1960-1985. Il est construit à partir de données d'observatoire et des satellites Magsat et POGO. Nous nous restreignons ici à la partie du modèle concernant le champ principal. Nous utilisons finalement trois modèles récents qui ont contribué à l'élaboration de l'IGRF-11 [Finlay *et al.*, 2010a,b] : CHAOS-3 [Olsen *et al.*, 2010] qui décrit la période 1997-2010 ; GRIMM-2 [Lesur *et al.*, 2010] qui décrit la période 2001-2010 ; POMME-6 [Maus *et al.*, 2010] qui décrit la période 2000-2010. Pour ces trois modèles, nous choisissons de travailler sur les spectres instantanés du mois de janvier 2005.

3.2.2 Modèles de dynamo

Nous travaillons dans ce chapitre sur une dynamo numérique dont le moteur est la convection solutale. Elle est caractérisée par les quatre paramètres de contrôle ($E = 10^{-3}$, $Ra^* = 5$, $Pr = 1$, $Pm = 10$) dont les définitions sont données au chapitre 2, et fonctionne avec une résolution latérale de 64 degrés en harmoniques sphériques. Nous avons choisi cette dynamo pour ses exigences raisonnables en temps de calcul, permettant une longue intégration temporelle de l'ordre de 20 temps de diffusion magnétique. Avec un nombre d'Ekman magnétique $E_\eta = 10^{-4}$ et un nombre de Reynolds magnétique $Rm = 232$, elle se situe de plus dans la zone terrestre proposée par Christensen *et al.* [2010].

3.2.3 Gamme choisie d'harmoniques sphériques

Nous représentons dans la colonne de gauche de la figure 3.1 les spectres spatiaux en puissance des différents modèles de champ considérés. Concernant les trois modèles récents ayant contribué à l'élaboration de l'IGRF-11, CHAOS-3, GRIMM-2 et POMME-6, on peut tout d'abord remarquer qu'ils affichent un très bon accord pour le champ statique, mais qu'ils commencent à diverger pour la variation séculaire à partir du degré 13. Nous tenons donc pour fiables les valeurs des temps de corrélation τ_n jusqu'au degré 13 inclus, ce qui est satisfaisant dans le cadre de notre étude puisque les spectres commencent à être contaminés par le champ crustal précisément à partir du degré 13 [voir p.ex. Hulot *et al.*, 2010a, p. 21-22]. Concernant le modèle CM4, on pourrait s'attendre à ce que les spectres instantanés R_n et Q_n soient de moindre précision que pour les précédents modèles car ils reposent sur des données plus anciennes. Comme nous travaillons sur des spectres moyens $\langle R_n \rangle$ et $\langle Q_n \rangle$ pour la période 1960-1984, il semble cependant raisonnable de tenir pour fiables les valeurs des temps de corrélation τ_n^* également jusqu'au degré 13. Concernant *gufml* sur la période 1840-1990, on peut considérer que les effets de la régularisation temporelle se font sentir sur $\langle R_n \rangle$ à partir du degré 10, et sur $\langle Q_n \rangle$ à partir du degré 8. Pour ce modèle, nous nous limiterons donc à l'étude des temps de corrélation τ_n jusqu'au degré 8.

Dans la colonne de droite de la figure 3.1, nous représentons 100 spectres instantanés tirés

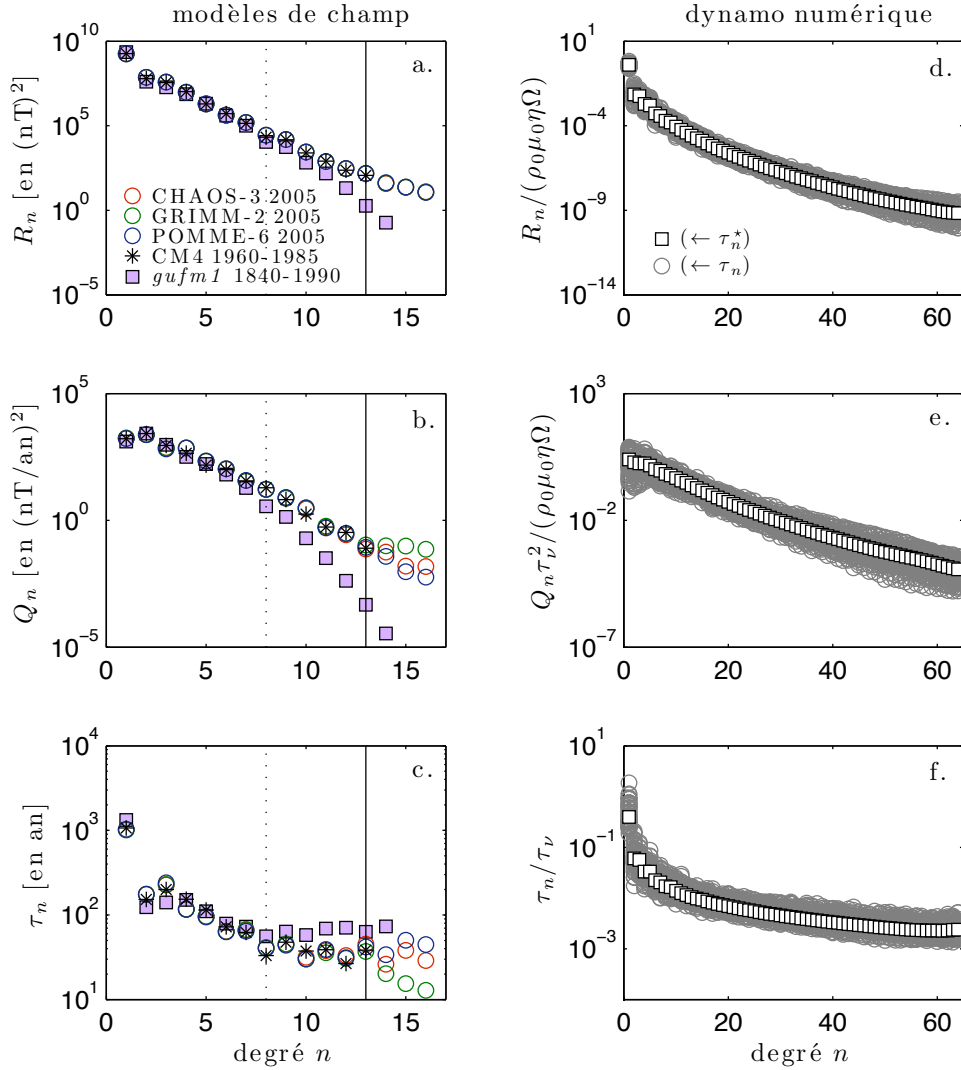


FIGURE 3.1 – Dans la colonne de gauche, spectres spatiaux en puissance pour différents modèles de champ : (a) champ statique ; (b) variation séculaire ; (c) temps de corrélation. Dans la colonne de droite, spectres spatiaux en puissance de la séquence dynamo : (d) champ statique ; (e) variation séculaire ; (f) temps de corrélation. Les ronds gris correspondent à 100 spectres instantanés R_n , Q_n et τ_n . Les carrés blancs correspondent aux spectres $\langle R_n \rangle$, $\langle Q_n \rangle$ et τ_n^* calculé sur la séquence dynamo complète. Les grandeurs sont adimensionnées selon la méthode (1) décrite dans le chapitre 2.

au hasard dans notre séquence dynamo (ronds gris). Nous représentons également les spectres moyens $\langle R_n \rangle$, $\langle Q_n \rangle$ et τ_n^* calculés sur la séquence complète (carrés blancs). Par analogie avec les modèles de champ, nous travaillerons principalement jusqu'au degré 13, quoiqu'occasionnellement jusqu'au degré 64 pour tester l'effet d'inclure un nombre plus important de valeurs. De manière intéressante, on peut remarquer que les composantes R_1 et R_2 dans notre séquence dynamo présentent les mêmes comportements singuliers que pour les différents modèles de champ présentés dans la colonne de gauche. Par rapport à l'allure moyenne, la composante R_1 semble dans les deux cas légèrement renforcée alors que la composante R_2 semble légèrement affaiblie. Il est à noter que cette tendance est également observée dans les modèles de champ archéomagnétiques [Hongre *et al.*, 1998, Hulot *et al.*, 2010a]. Ce comportement se retrouve de manière logique sur les temps de corrélation τ_1 et τ_2 . Nous discuterons ultérieurement pourquoi nous choisissons d'exclure le dipôle de notre analyse.

3.3 Formalisme statistique

3.3.1 Temps de corrélation instantanés

Nous nous plaçons ici dans le cadre du modèle statistique isotrope stationnaire (SIS) proposé par Hulot et Le Mouél [1994]. Ce modèle fait l'hypothèse que chaque coefficient de Gauss de degré n est un processus aléatoire gaussien stationnaire⁴ de moyenne nulle et de variance σ_n^2 . Sous cette hypothèse, la dérivée temporelle de chaque coefficient de Gauss de degré n est également un processus aléatoire gaussien stationnaire de moyenne nulle et de variance $\sigma_n'^2$. Dans ce formalisme statistique, l'espérance mathématique de la contribution R_n du champ statique (Eq. 3.1) vaut

$$\overline{R}_n = (n+1)(2n+1)\sigma_n^2 \quad (3.5)$$

et celle de la contribution Q_n de la variation séculaire (Eq. 3.2) vaut

$$\overline{Q}_n = (n+1)(2n+1)\sigma_n'^2 \quad (3.6)$$

Il est alors possible de définir la variable réduite,

$$X_n = (2n+1)R_n/\overline{R}_n, \quad (3.7)$$

associée à la contribution R_n , ainsi que la variable réduite,

$$Y_n = (2n+1)Q_n/\overline{Q}_n, \quad (3.8)$$

⁴Un processus aléatoire/stochastique est une variable aléatoire (i.e. une fonction qui décrit l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire) dont on prend en compte l'évolution temporelle. Il est dit gaussien s'il suit une loi normale, stationnaire s'il admet le même comportement aux temps t et $t+k$.

associée à la contribution Q_n , qui suivent toutes les deux des lois du χ^2 à $(2n + 1)$ degrés de liberté. En effectuant le rapport des équations 3.7 et 3.8, on obtient l'expression,

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{(R_n/\bar{R}_n)}{(Q_n/\bar{Q}_n)} = \left(\frac{\tau_n}{\bar{\tau}_n} \right)^2, \quad (3.9)$$

où $\bar{\tau}_n = (\bar{R}_n/\bar{Q}_n)^2$ est la médiane du temps de corrélation τ_n . Comme X_n et Y_n sont tous les deux des processus aléatoires qui suivent des lois du χ^2 à $(2n + 1)$ degrés de liberté, il en découle que le rapport $(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$ suit une loi de Fisher⁵ à $(2n + 1, 2n + 1)$ degrés de liberté.

3.3.2 Temps de corrélation moyens

Si on travaille avec des temps de corrélation moyens tels qu'ils sont définis par l'équation 3.4, il faut prendre en compte le fait que les coefficients de Gauss $\{g_n^m, h_n^m\}$ de degré n vont prendre des valeurs indépendantes après approximativement $3 \cdot \bar{\tau}_n$ [Hongre *et al.*, 1998]. Si T désigne l'intervalle de temps sur lequel on effectue la moyenne temporelle, le nombre de tirages indépendants de ces coefficients de Gauss $\{g_n^m, h_n^m\}$ de degré n vaudra de manière conservatrice $N_n = \lceil T/(3 \cdot \bar{\tau}_n) \rceil$, où les crochets $\lceil \rceil$ définissent la partie entière par excès. Les moyennes temporelles des contributions R_n et Q_n de degré n peuvent alors être approchées par les sommes :

$$\langle R_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T R_n dt \approx \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} R_n(i) \approx \frac{n+1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{m=0}^n [(g_n^m)_i^2 + (h_n^m)_i^2] \quad (3.10)$$

$$\langle Q_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T Q_n dt \approx \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} Q_n(i) \approx \frac{n+1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{m=0}^n [(\dot{g}_n^m)_i^2 + (\dot{h}_n^m)_i^2]. \quad (3.11)$$

Les espérances mathématiques de $\langle R_n \rangle$ et $\langle Q_n \rangle$ valent respectivement :

$$\overline{\langle R_n \rangle} = \frac{n+1}{N_n} N_n (2n+1) \sigma_n^2 = \bar{R}_n \quad (3.12)$$

$$\overline{\langle Q_n \rangle} = \frac{n+1}{N_n} N_n (2n+1) \sigma_n'^2 = \bar{Q}_n. \quad (3.13)$$

A partir des équations 3.10 et 3.12 d'une part, et des équations 3.11 et 3.13 d'autre part, il est alors possible de définir les variables réduites,

$$X^* = N_n (2n+1) \langle R_n \rangle / \bar{R}_n \quad (3.14)$$

$$Y^* = N_n (2n+1) \langle Q_n \rangle / \bar{Q}_n, \quad (3.15)$$

⁵Nous utilisons dans ce chapitre la dénomination française de cette distribution. Dans la littérature anglo-saxonne, elle est généralement désignée sous le terme de *F-distribution* (de Snedecor).

qui suivent toutes les deux des lois du χ^2 à $(2n + 1) \cdot N_n$ degrés de liberté. En effectuant le rapport des équations 3.14 et 3.15, il en découle que

$$\frac{X^\star}{Y^\star} = \frac{(\langle R_n \rangle / \bar{R}_n)}{(\langle Q_n \rangle / \bar{Q}_n)} = \left(\frac{\tau_n^\star}{\bar{\tau}_n} \right)^2 \quad (3.16)$$

suit une loi de Fisher à $((2n + 1) \cdot N_n, (2n + 1) \cdot N_n)$ degrés de liberté.

3.3.3 Validité du formalisme statistique

Nous nous proposons dans cette partie de tester sur notre dynamo numérique la validité du formalisme statistique présenté ci-dessus. Pour ce faire, nous calculons tout d'abord 200 ensembles de valeurs de R_n , Q_n et τ_n à partir de jeux de coefficients de Gauss espacés de $5 \cdot \tau_n$ (pour s'assurer confortablement de l'indépendance statistiques des valeurs). En moyennant sur la séquence dynamo complète, nous calculons ensuite $\langle R_n \rangle$, $\langle Q_n \rangle$ et $\tau_n^\star$, de manière à se donner des estimateurs robustes de $\bar{R}_n$, $\bar{Q}_n$ et $\bar{\tau}_n$. Pour chacun des 200 instantanés, nous pouvons alors calculer les variables réduites X_n , Y_n et $(\tau_n / \bar{\tau}_n)^2$, dont nous représentons les distributions expérimentales dans la partie gauche de la figure 3.2. Nous comparons finalement les distributions expérimentales représentées par les barres grises avec les distributions théoriques représentées en trait noir. Nous pouvons constater un bon accord au premier ordre pour les processus aléatoires X_n et Y_n , qui sont sensés suivre des lois du χ^2 à $(2n + 1)$ degrés de liberté. De manière intéressante, l'accord semble encore plus satisfaisant pour les processus aléatoires $(\tau_n / \bar{\tau}_n)^2$ qui sont censés suivre des lois de Fisher à $(2n + 1, 2n + 1)$ degrés de liberté. Ceci suggère que les écarts de R_n et Q_n par rapport au comportement statistique attendu se compensent en partie pour les temps de corrélation τ_n , et que ces derniers constituent donc une grandeur de choix pour une étude statistique. De manière plus quantitative, on peut tester l'adéquation entre les distributions théoriques et expérimentales de la grandeur $(\tau_n / \bar{\tau}_n)^2$ à l'aide par exemple d'un test de Kolmogorov-Smirnov dont l'hypothèse nulle postule que les deux distributions sont égales. Avec un niveau de confiance de 5%, on obtient le rejet de l'hypothèse nulle uniquement pour la composante associée au dipôle. Ce résultat n'est d'ailleurs pas choquant et parfaitement compatible avec les données. Le champ magnétique terrestre est effet connu pour avoir une valeur moyenne non-nulle de son dipôle axial g_1^0 , ce qui empêche l'application du modèle SIS pour le degré 1. Pour cette raison, nous choisissons donc d'exclure le dipôle dans la suite de cette étude.

De manière indicative et moins rigoureuse car nous ne disposons pas d'une séquence dynamo suffisamment longue, il est également possible de tester le formalisme statistique associé à des temps de corrélation moyens. Pour ce faire, nous travaillons sur 75 boîtes contiguës de largeur $6 \cdot \bar{\tau}_1$, et nous calculons dans chacune d'entre elles des ensembles de valeurs $\langle R_n \rangle$, $\langle Q_n \rangle$ et $\tau_n^\star$ en moyennant sur $6 \cdot \bar{\tau}_n$. Nous utilisons ensuite les mêmes estimateurs que précédemment pour $\bar{R}_n$, $\bar{Q}_n$ et $\bar{\tau}_n$, ce qui nous permet de calculer les variables réduites $X_n^\star$, $Y_n^\star$ et $(\tau_n^\star / \bar{\tau}_n)^2$. Etant donné que nous avons $N_n = \lceil (6 \cdot \bar{\tau}_n) / (3 \cdot \bar{\tau}_n) \rceil = 2$, les processus aléatoires $X_n^\star$ et $Y_n^\star$ sont sensés suivre des lois du χ^2 à $(4n + 2)$ degrés de liberté, tandis que les processus aléatoires $(\tau_n^\star / \bar{\tau}_n)^2$ sont censés

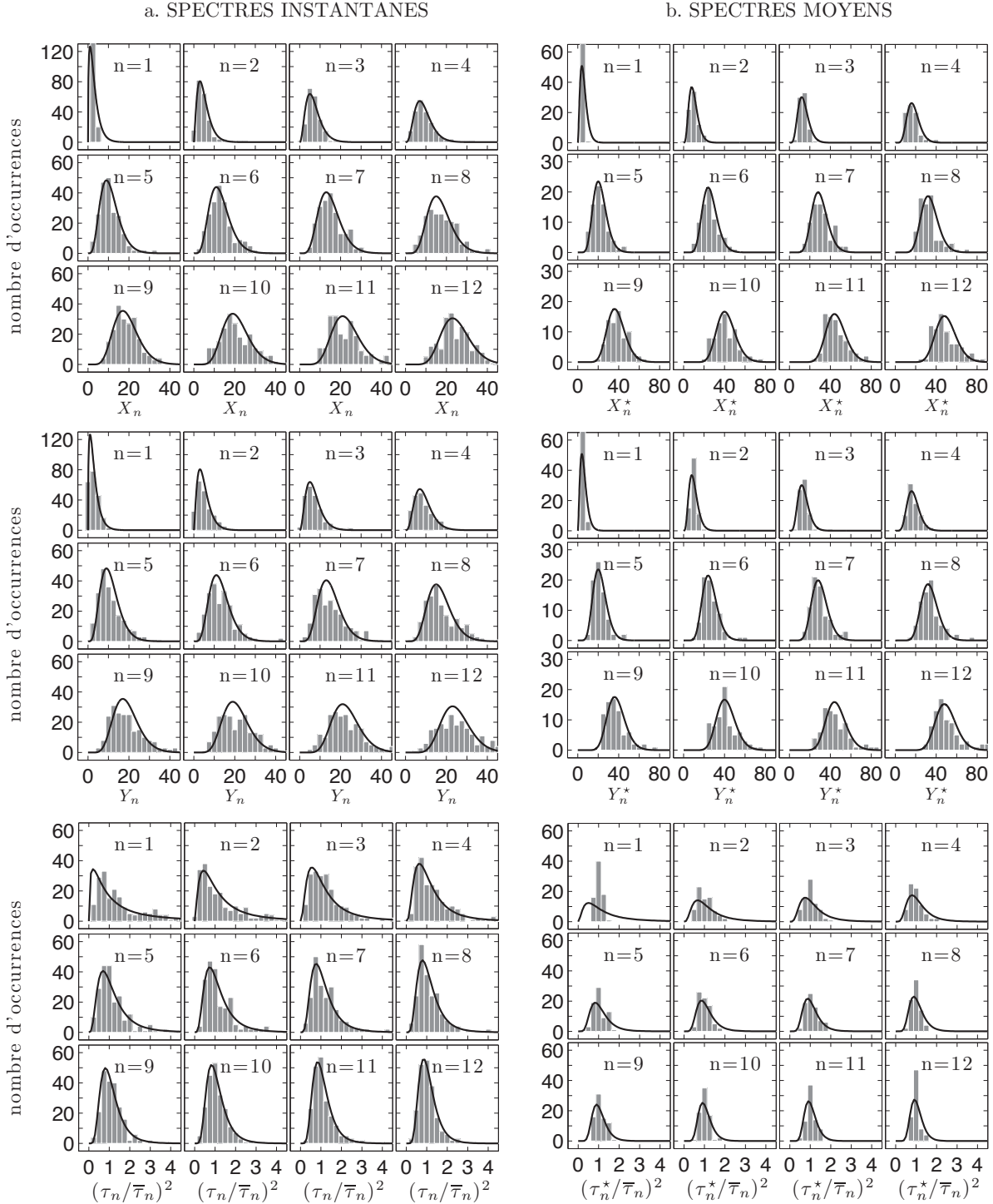


FIGURE 3.2 – Validité du formalisme statistique pour : (a) les grandeurs X_n , Y_n et $(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$ déduites à partir de 200 spectres instantanés ; (b) les grandeurs X_n^* , Y_n^* et $(\tau_n^*/\bar{\tau}_n)^2$ déduites à partir de 75 spectres moyennés dans le temps sur $6 \cdot \bar{\tau}_n$. Les barres grises correspondent aux distributions expérimentales, tandis que les traits noirs correspondent aux distributions théoriques.

suivre des lois de Fisher à $(4n + 2, 4n + 2)$ degrés de liberté. Les distributions expérimentales et théoriques sont présentées dans la partie droite de la figure 3.2. L'accord est beaucoup moins concluant que pour les spectres instantanés, mais on peut tout de même observer que les distributions expérimentales suivent la tendance prédite par les distributions théoriques, à l'exception du dipôle comme pour les spectres instantanés. Plusieurs hypothèses peuvent être formulées pour expliquer ce moins bon accord avec les données que pour les spectres instantanés. Il tiendrait tout d'abord d'avoir une séquence dynamo plus longue pour vérifier si ce résultat persiste sur un plus grand nombre d'échantillons. Si ce résultat persiste, il mériterait ensuite de se demander si nous n'avons pas été trop restrictif dans notre définition du nombre de degrés de liberté N_n . Nos distributions expérimentales des $(\tau_n^*/\bar{\tau}_n)^2$ auraient en effet un accord plus satisfaisant avec les distributions théoriques si le nombre de degrés de liberté était multiplié par deux (c'est-à-dire, si on considérait que les valeurs des coefficients de Gauss devenaient indépendantes deux fois plus rapidement). Il faut finalement garder à l'esprit que la dynamo n'est pas un générateur de nombres aléatoires, et qu'on s'attend donc tôt ou tard à ce que les prédictions du modèle SIS divergent de la réalité lorsqu'on effectue des moyennes temporelles.

3.4 Algorithme utilisé

3.4.1 Position du problème

Nous considérons dans cette partie deux lois possibles pour expliquer la décroissance des temps de corrélation τ_n avec le degré n en harmoniques sphériques. Nous considérons d'une part une loi linéaire inverse,

$$\bar{\tau}_n = \tau_{SV}/n, \quad (3.17)$$

qui est caractérisée par l'unique paramètre τ_{SV} et d'autre part une loi puissance,

$$\bar{\tau}_n = \delta \times n^{-\gamma}, \quad (3.18)$$

qui est caractérisée par les deux paramètres (δ, γ) . Comme nous l'avons vu précédemment, les fluctuations statistiques prédites par le modèle SIS entraînent que les variables $(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$ associées aux temps de corrélation instantanés τ_n suivent une loi de Fisher à $(2n + 1, 2n + 1)$ degrés de liberté, et que les variables $(\tau_n^*/\bar{\tau}_n)^2$ associées aux temps de corrélation moyens τ_n^* suivent une loi de Fisher à $((2n + 1) \cdot N_n, (2n + 1) \cdot N_n)$ degrés de liberté. A partir d'un jeu d'observations τ_n^{obs} et des fluctuations statistiques prédites par le modèle SIS, nous cherchons dans le paragraphe suivant à déterminer empiriquement les meilleurs valeurs des paramètres τ_{SV} , δ et γ .

3.4.2 Description de l'algorithme

Information expérimentale sur les observations

Soit $\mathcal{O} = \{\tau_n^{\text{obs}}\}_{n=N_0}^N$ l'espace des observations qui se compose des temps de corrélation du degré N_0 jusqu'au degré N . Comme nous ne disposons que d'une seule observation par degré, nous nous plaçons dans l'hypothèse où nous considérons que cette unique observation coïncide avec le mode (i.e. la valeur la plus probable) de la distribution. La densité de probabilité $F^{K,K}(x)$ d'une distribution de Fisher à (K, K) degrés de liberté étant asymétrique, la valeur médiane $x = 1$ diffère du mode $x = \chi_K$, où $\chi_K = (K - 2)/(K + 2)$ pour $K > 2$. Ceci implique que l'information expérimentale sur les observations est décrite par la densité de probabilité

$$g_{\text{obs}}(\{\bar{\tau}_n\}_{n=N_0}^N) = \prod_{n=N_0}^N F^{2n+1, 2n+1} \left[\chi_{2n+1} \left(\frac{\tau_n^{\text{obs}}}{\bar{\tau}_n} \right)^2 \right] \quad (3.19)$$

lorsqu'on travaille sur des spectres instantanés, et par

$$g_{\text{obs}}(\{\bar{\tau}_n\}_{n=N_0}^N) = \prod_{n=N_0}^N F^{(2n+1)N_n, (2n+1)N_n} \left[\chi_{(2n+1)N_n} \left(\frac{\tau_n^{\text{obs}}}{\bar{\tau}_n} \right)^2 \right] \quad (3.20)$$

lorsqu'on travaille sur des spectres moyens.

Information *a priori* sur les paramètres des modèles

Soit $\mathcal{M}$ l'espace des paramètres du modèle, sur lequel nous ne supposons aucun *a priori* si ce n'est que les paramètres prennent des valeurs positives. Dans le cas de la loi linéaire inverse, $\mathcal{M} = \{\tau_{\text{SV}}\}$ et l'information *a priori* sur le paramètre τ_{SV} est décrite par la densité de probabilité

$$f_{\text{prior}}(\tau_{\text{SV}}) = H(\tau_{\text{SV}}), \quad (3.21)$$

où $H(x)$ désigne la fonction de Heaviside. Dans le cas de la loi puissance, $\mathcal{M} = \{\delta, \gamma\}$ et l'information *a priori* sur les paramètres (δ, γ) est décrite par la densité de probabilité

$$f_{\text{prior}}(\delta, \gamma) = H(\delta) \cdot H(\gamma). \quad (3.22)$$

Information *a posteriori* sur les paramètres des modèles

En se plaçant dans le cas où les incertitudes de modélisation sont négligeables devant les incertitudes expérimentales (associées dans le cas présent à la dispersion statistique) des observations, l'information *a posteriori* sur les paramètres du modèle s'exprime par la densité de probabilité [voir p.ex. Tarantola, 2005, Eq. 1.93]

$$f_{\text{post}}(\tau_{\text{SV}}) = \frac{1}{\nu} \cdot f_{\text{prior}}(\tau_{\text{SV}}) \cdot g_{\text{obs}}(\{\tau_{\text{SV}}/n\}_{n=N_0}^N) \quad (3.23)$$

dans le cas de la loi linéaire inverse, et par la densité de probabilité

$$f_{\text{post}}(\delta, \gamma) = \frac{1}{\nu} \cdot f_{\text{prior}}(\delta, \gamma) \cdot g_{\text{obs}}\left(\{\delta \times n^{-\gamma}\}_{n=N_0}^N\right) \quad (3.24)$$

dans le cas de la loi puissance, où ν correspond dans les deux cas à un facteur de normalisation.

Procédure pratique

A partir de l'équation 3.23, nous déterminons le maximum de vraisemblance de τ_{SV} accompagné de son intervalle de confiance à 90%. A partir de l'équation 3.24, nous déterminons le maximum de vraisemblance de δ et γ . Il peut également être instructif de représenter directement sous forme de carte la densité de probabilité $f_{\text{post}}(\delta, \gamma)$ de manière à visualiser graphiquement la dispersion des valeurs.

3.4.3 Tests synthétiques

Pour vérifier la robustesse de notre algorithme, nous avons généré des données synthétiques de la manière suivante. En se fixant une valeur de τ_{SV} (respectivement de δ et γ), nous avons tout d'abord calculé $\bar{\tau}_n$ à l'aide de l'équation 3.17 (respectivement de l'équation 3.18). Nous avons ensuite tiré des jeux $\{\tau_n^{\text{obs}}\}$ d'observations synthétiques (chaque jeu se composant d'une valeur de τ_n^{obs} pour chaque degré n de 2 à 13) de telle sorte que $(\tau_n^{\text{obs}}/\bar{\tau}_n)^2$ suive une distribution de Fisher à $(2n + 1, 2n + 1)$ degrés de liberté. Pour chaque jeu $\{\tau_n^{\text{obs}}\}$ d'observations synthétiques, nous avons finalement déterminé les valeurs de τ_{SV} , δ et γ à l'aide de notre algorithme. Par soucis de comparaison, nous avons également déterminé leurs valeurs à l'aide d'une procédure classique de moindres carrés.

Nous représentons à la figure 3.3 la distribution des paramètres τ_{SV} , δ et γ déterminés à partir de 1000 jeux de données synthétiques générés autour de la valeur théorique $\tau_{\text{SV}} = 500$ ans (et donc, ce qui revient au même que $\delta = 500$ ans et $\gamma = 1$). Les courbes en vert proviennent de la mise en œuvre de notre algorithme, alors que les courbes en rouge proviennent de la solution d'un algorithme de moindres carrés. Les encadrés a et d décrivent respectivement la densité de probabilité et la fonction de répartition de τ_{SV} . Ils illustrent le fait que les deux algorithmes retrouvent tous les deux la valeur théorique attendue (représenté par le trait noir vertical). Il est toutefois à noter que notre algorithme conduit à une distribution plus piquée des valeurs, ce qui conduit donc à une estimation plus robuste du paramètre τ_{SV} . Les encadrés b-c (respectivement e-f) décrivent les densités de probabilité (respectivement les fonctions de répartition) des paramètres δ et γ . Alors que notre algorithme retrouve les valeurs théoriques attendues de δ et γ avec une relativement bonne précision, la même procédure échoue avec un algorithme de moindres carrés. Alors que notre algorithme prend en compte la distribution naturelle des τ_n^{obs} et cherche à déterminer les paramètres (δ, γ) tels que $\bar{\tau}_n = \delta \times n^{-\gamma}$ s'approche de la médiane des τ_n^{obs} , l'algorithme des moindres carrés suppose une distribution gaussienne des τ_n^{obs} et cherche à déterminer

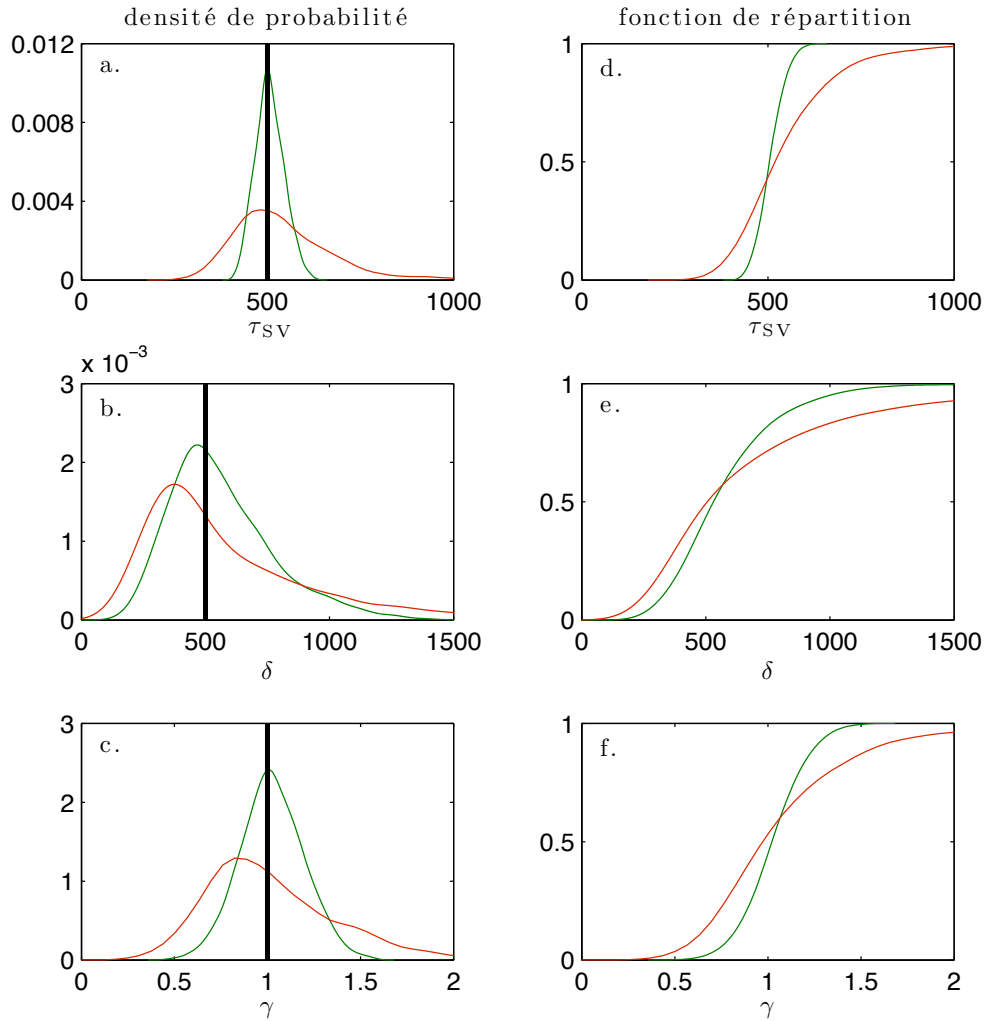


FIGURE 3.3 – Détermination des paramètres τ_{SV} , δ et γ à partir de 1000 jeux de données synthétiques générés autour de la valeur théorique $\tau_{SV} = 500$ ans. La colonne de gauche (panneaux a-c) représente les densité de probabilité, alors que la colonne de droite (panneaux d-f) représente les fonctions de répartition. Les courbes en vert proviennent de la mise en œuvre de notre algorithme, alors que les courbes en rouge proviennent de la solution d'un algorithme de moindres carrés. Les traits noirs verticaux rappellent la valeur théorique sur laquelle nous devrions tomber.

TABLE 3.1 – Valeurs des paramètres τ_{SV} , δ et γ déterminées pour différents modèles de champ géomagnétique ainsi que pour notre séquence dynamo. Les valeurs en gras correspondent aux maxima de vraisemblance, alors que les valeurs entre crochets indiquent l’intervalle de confiance à 90%. Les valeurs de τ_{SV} et δ pour les modèles de champ géomagnétique sont exprimées en années, alors que ces valeurs pour la dynamo numérique sont exprimés en unités de temps de diffusion visqueuse.

modèle	quantité	N_0	N	τ_{SV}	δ	γ
CHAOS-3 2005	τ_n	2	13	[378 ; 425 ; 483]	457	1,03
GRIMM-2 2005	τ_n	2	13	[361 ; 406 ; 461]	547	1,14
POMME-6 2005	τ_n	2	13	[368 ; 413 ; 470]	527	1,11
CM4 1960-1985	τ_n^*	2	13	[370 ; 415 ; 472]	493	1,08
<i>gufml</i> 1840-1990	τ_n^*	2	8	[395 ; 472 ; 584]	395	0,90
<i>gufml</i> 1840-1890	τ_n^*	2	8	[463 ; 554 ; 687]	293	0,63
<i>gufml</i> 1890-1940	τ_n^*	2	8	[364 ; 436 ; 541]	299	0,78
<i>gufml</i> 1940-1990	τ_n^*	2	8	[388 ; 464 ; 575]	695	1,24
dynamo numérique	τ_n	2	13	[0,129 ; 0,145 ; 0,164]	0,151	1,02
dynamo numérique	τ_n	2	24	[0,138 ; 0,147 ; 0,157]	0,141	0,98
dynamo numérique	τ_n	2	48	[0,135 ; 0,140 ; 0,145]	0,176	1,07
dynamo numérique	τ_n^*	2	13	[0,137 ; 0,140 ; 0,143]	0,161	1,06
dynamo numérique	τ_n^*	2	24	[0,136 ; 0,137 ; 0,138]	0,150	1,03
dynamo numérique	τ_n^*	2	48	[0,133 ; 0,134 ; 0,135]	0,155	1,04

les paramètres (δ, γ) tels que $\bar{\tau}_n = \delta \times n^{-\gamma}$ s’approche du mode des τ_n^{obs} . D’une part, comme le mode est inférieur à la médiane des τ_n^{obs} , on s’attend à une sous-estimation de la valeur de γ . D’autre part, comme le mode tend à se rapprocher de la médiane des τ_n^{obs} lorsque le degré n augmente, on s’attend à une sous-estimation de la valeur de δ . C’est effectivement ce qu’on observe dans les panneaux b et c de la figure 3.3.

3.5 Comparaison des deux modèles

3.5.1 Description des résultats

Nous avons estimés les paramètres τ_{SV} , δ et γ pour les différents modèles présentés dans la section 3.2. Toutes les valeurs sont regroupées dans la table 3.1, dans laquelle les valeurs de τ_{SV} et δ sont exprimées en années pour les modèles de champ géomagnétique, et en unités de temps de diffusion visqueuse τ_v pour la dynamo numérique. Les valeurs de l’exposant γ sont sans dimension. Des exemples de résultats sont également présentés à la figure 3.4 : pour le modèle

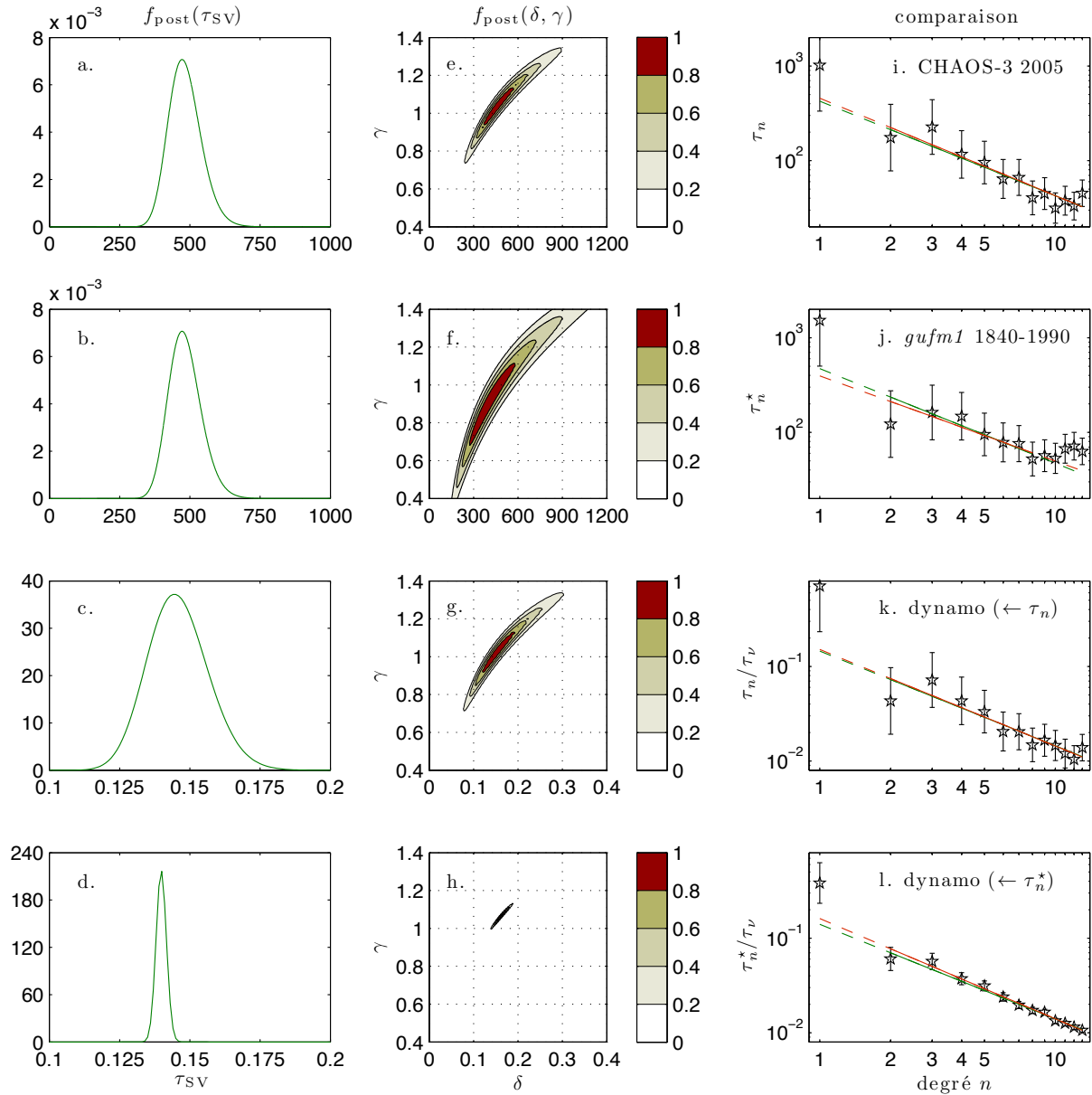


FIGURE 3.4 – Exemple de mise en œuvre de notre algorithme pour : (aei) l'époque 2005 de CHAOS-3 ; (bfj) la période 1840-1990 de *gufm1* ; (cgk) une époque arbitraire de notre séquence dynamo ; (dhl) une période arbitraire de $10 \cdot \tau_{\text{SV}}$ de notre séquence numérique. La colonne de gauche indique la densité de probabilité de τ_{SV} calculée à partir de l'équation 3.23. La colonne du milieu indique la densité de probabilité des paramètres (δ, γ) calculée à partir de l'équation 3.24 et normalisée par rapport à son maximum. La colonne de droite représente les observations τ_n^{obs} (étoiles noires) en fonction du degré n , la barre de dispersion placée sur les observations dans notre algorithme (basée sur les équations 3.19 et 3.20), la loi linéaire inverse (en vert), et la loi puissance (en rouge). Le temps est mesuré en années, sauf pour les simulations numériques, auquel cas il est mesuré en unité de temps de diffusion visqueuse τ_ν .

CHAOS-3 en 2005 (encadrés aei) ; pour le modèle *gufm1* de 1840 à 1990 (encadrés bfj) ; pour une époque arbitraire de notre dynamo numérique (encadrés cgk) ; et pour une période arbitraire de $10 \cdot \tau_{SV}$ de notre dynamo numérique (encadrés dhl).

En ce qui concerne les modèles de champ géomagnétique, nous pouvons tout d'abord lire dans la table 3.1 un bon accord entre les paramètres estimés pour les modèles de dernière génération (CHAOS-3, GRIMM-2 et POMME-6) et CM4. Une valeur moyenne $\tau_{SV} = 415 \pm_{45}^{55}$ ans peut être déduite, tandis que la valeur du paramètre γ évolue entre 1,03 et 1,08. La figure 3.4 représente la densité de probabilité des paramètres (δ, γ) calculée à partir de l'équation 3.24. Elle met en évidence un motif en forme de croissant qui témoigne d'une corrélation importante entre les paramètres δ et γ . Elle reflète également le fait que la valeur $\gamma = 1$ intersecte le cœur du croissant, et qu'elle constitue de ce fait une valeur tout à fait plausible parmi d'autres valeurs possibles entre 0,7 et 1,3. En ce qui concerne le modèle *gufm1* de 1840 à 1990, le nombre restreint de degrés sur lequel nous travaillons (de 2 jusqu'à 8) implique une détermination des paramètres avec une moindre précision. Outre la période 1840-1990, nous avons également considéré trois sous-périodes de 50 ans : 1840-1890 ; 1890-1940 ; 1940-1990. Comme ceci est illustré à la table 3.1, les valeurs des paramètres τ_{SV} , δ et γ fluctuent entre les différentes sous-périodes mais restent globalement compatibles avec les valeurs obtenues pour les modèles de champ contemporains. En contrepoint de la remarque faite à la fin de la section 3.3.3, le fait que les valeurs de paramètres diffèrent alors que nous travaillons sur des fenêtres temporelles inférieures à $3 \cdot \tau_n$ pour tous les τ_n , suggérerait que deux valeurs contiguës d'un coefficient de Gauss de degré n contribuant à τ_n deviendraient indépendantes légèrement avant $3 \cdot \tau_n$.

En ce qui concerne notre séquence dynamo, nous prenons l'exemple d'un jeu de temps de corrélation instantanés calculés à une époque arbitraire donnée, et l'exemple d'un jeu de temps de corrélation dérivés à partir de spectres moyens calculés sur une période arbitraire donnée de $10 \cdot \tau_{SV}$. Les densités de probabilité des paramètres τ_{SV} , δ et γ sont représentées à la figure 3.4 et les valeurs détaillées des paramètres sont fournies à la table 3.1. Il est tout d'abord possible de constater que la valeur de τ_{SV} issue du spectre moyen est déterminée avec un intervalle de confiance plus resserré que la valeur de τ_{SV} issue du spectre instantané. L'intervalle de confiance de τ_{SV} pour le spectre moyen est de plus inclus dans l'intervalle de confiance de τ_{SV} pour le spectre instantané, ce qui prouve une compatibilité entre les deux valeurs. Pour tester l'impact de l'augmentation du nombre de degrés en harmoniques sphériques, nous avons également effectué des ajustements jusqu'aux degrés 24 et 48. Une légère décroissance de la valeur de τ_{SV} est observée, mais celle-ci reste cependant limitée avec un écart relatif inférieur à 5%. Les valeurs de γ subissent également des fluctuations, sans qu'aucune tendance claire ne se manifeste toutefois. Elles restent en tous les cas peu éloignées de la valeur unitaire.

Considérant d'une part différents modèles de champ géomagnétique, et d'autre part deux exemples issus de notre séquence dynamo, nous pouvons tirer quelques conclusions partielles. L'étude des cas précédents suggère d'une part que la loi linéaire inverse $\bar{\tau}_n = \tau_{SV}/n$ est une bonne candidate pour expliquer l'évolution des temps de corrélation τ_n en fonction de n , puisque la valeur de l'exposant γ n'est jamais très éloignée de 1. Elle suggère d'autre part une compatibilité des spectres instantanés et moyens dans la détermination de τ_{SV} , l'intervalle de confiance

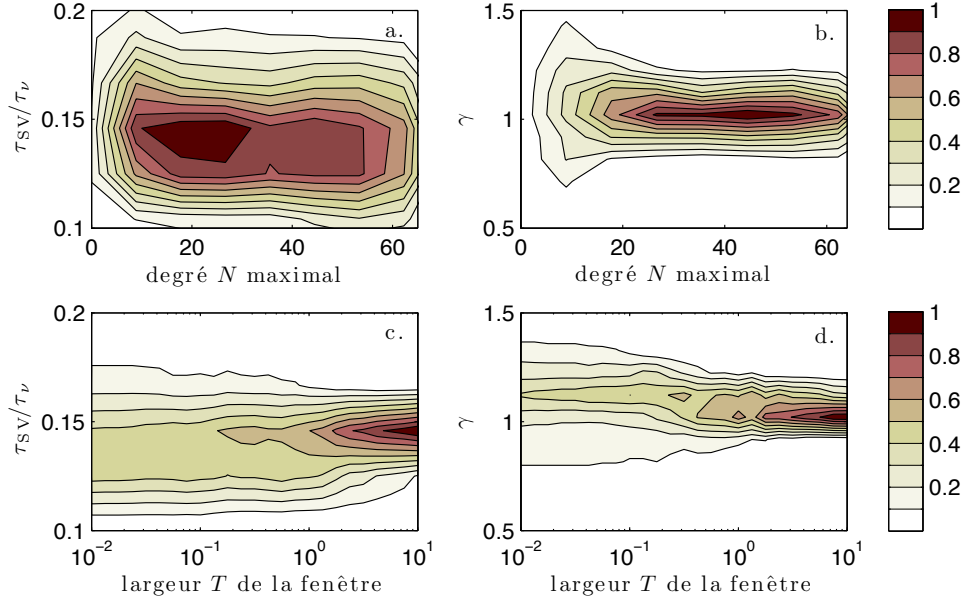


FIGURE 3.5 – Variabilité des paramètres τ_{SV} (en unités de temps de diffusion visqueuse τ_v) et γ : (ab) en fonction du degré N maximum pour un ensemble de 200 spectres instantanés ; (cd) en fonction de la largeur T de la fenêtre pour un ensemble de 100 spectres moyens. Les grandeurs représentées sont des densités de probabilité normalisées par leur maximum, T étant mesuré en multiples de la valeur $\bar{\tau}_{SV} = 0,140 \tau_v$ (voir texte).

étant plus restreint dans le cas de spectres moyens. Il s'agit bien-sûr de constats issus de cas particuliers. Dans une optique statistique, nous nous attachons à regarder dans la partie suivante la variabilité des paramètres τ_{SV} et γ sur une collection de spectres instantanés et moyens issue de notre séquence dynamo.

3.5.2 Variabilité des paramètres des modèles

Influence de la gamme d'harmoniques sphériques

Nous testons dans ce paragraphe l'influence de la gamme d'harmoniques sphériques utilisée lors de la détermination de τ_{SV} et γ à partir de spectres instantanés. Nous travaillons sur les 200 spectres instantanés définis dans la section 3.3.3. A l'aide de notre algorithme, nous avons tout d'abord déterminé τ_{SV} et γ sur chacun des spectres en effectuant simultanément les ajustements sur les degrés 2 à N , où N varie de 3 à 64. Pour chaque valeur de N , nous avons ensuite calculé la densité de probabilité des estimés de τ_{SV} et γ sur les 100 instantanés.

Comme cela est illustré à la figure 3.5b, on peut remarquer que la valeur de γ converge approximativement à partir de $N = 20$ et que la densité de probabilité est distribuée symétriquement autour de la valeur $\gamma = 1$. Ceci appuie notre hypothèse selon laquelle la loi linéaire inverse serait

une candidate de choix pour expliquer la dépendance des temps de corrélations τ_n avec le degré n en harmoniques sphériques. De manière intéressante, la figure 3.5a montre que la valeur de τ_{SV} converge encore plus rapidement que la valeur de γ , approximativement à partir du degré $N = 10$. Ceci indique que la loi linéaire inverse caractérisée par l'unique paramètre τ_{SV} est relativement robuste lorsqu'on travaille jusqu'au degré $N = 13$, comme on l'a fait précédemment.

Influence de la largeur de fenêtre

Nous testons dans ce paragraphe l'influence de la largeur de la fenêtre temporelle utilisée lors de la détermination de τ_{SV} et γ à partir de spectres moyens. Pour ce faire, nous avons tout d'abord segmentée notre séquence dynamo en 100 boîtes de largeur $10 \cdot \bar{\tau}_{SV}$ (où $\bar{\tau}_{SV} = 0,140 \cdot \tau_v$ est un estimé de τ_{SV} choisi en accord avec les résultats obtenus précédemment). A l'aide de notre algorithme, nous avons ensuite déterminé τ_{SV} et γ dans chacune des boîtes sur une fenêtre temporelle de largeur T variant de $10^{-2} \cdot \bar{\tau}_{SV}$ à $10^1 \cdot \bar{\tau}_{SV}$. Pour chaque largeur de fenêtre, nous avons finalement calculé la densité de probabilité des estimés de τ_{SV} et γ sur les 100 boîtes.

Quoique τ_{SV} pourrait être légèrement sous-estimé et γ légèrement sur-estimé sur les courtes largeurs de fenêtre, les figures 3.5cd indiquent une bonne compatibilité des valeurs de τ_{SV} et γ quelle que soit la largeur des fenêtres. Ceci confirme le constat que nous avons fait à la fin de section 3.5.1 selon lequel il existerait un continuum entre les valeurs des paramètres déduites à partir de spectres instantanés et celles déduites à partir des spectres moyens. La dispersion des paramètres τ_{SV} et γ se resserre lorsqu'on augmente la largeur de fenêtre, ce qui conduit ainsi à une détermination plus précise. La figure 3.5d suggère également une distribution de γ autour de la valeur 1.

3.5.3 Compatibilité statistique de la loi linéaire inverse

En fondant notre analyse à la fois sur des modèles de champ géomagnétique et sur une séquence dynamo, nous avons montré que la loi linéaire inverse $\bar{\tau}_n = \tau_{SV}/n$ était qualitativement satisfaisante, et qu'une loi puissance $\bar{\tau}_n = \delta \times n^{-\gamma}$ n'apportait qu'un raffinement marginal par rapport à cette dernière (voir par exemple la colonne de droite de la figure 3.4, ou encore la colonne de droite de la figure 3.5 qui montre la valeur $\gamma = 1$ est parfaitement raisonnable). Pour tester la pertinence de la loi linéaire inverse, un autre angle d'attaque consiste à s'intéresser à la compatibilité statistique de ses paramètres avec les observations.

Comme nous l'avons vu dans la section 3.3.1, il est en effet attendu que les temps de corrélation instantanés τ_n fluctuent autour de la valeur théorique $\bar{\tau}_n$ de telle sorte que le processus aléatoire $(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$ suive une loi de Fisher à $(2n+1, 2n+1)$ degré de liberté. Nous pouvons alors vérifier que les observations τ_n^{obs} sont bien à l'intérieur des fluctuations prédites autour de la valeur théorique $\bar{\tau}_n$. Pour ce faire, nous représentons à la figure 3.6abc les temps de corrélation $\bar{\tau}_n$ (obtenus avec notre algorithme pour la loi linéaire inverse) avec leurs barres de dispersion statistique à 90% (déduites à partir des densités de probabilité $F^{2n+1, 2n+1}(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$). Dans le domaine

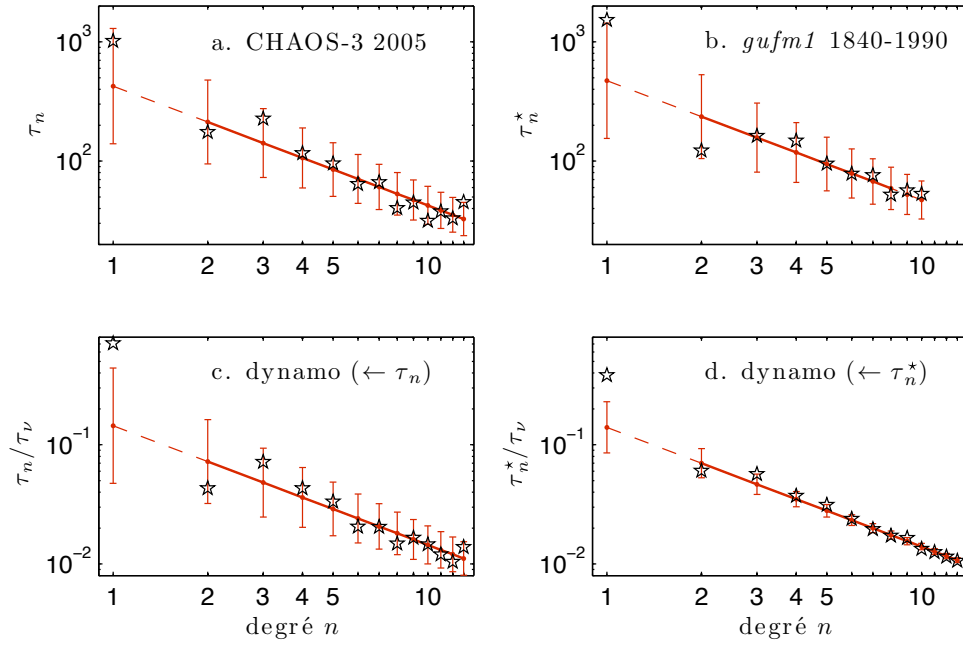


FIGURE 3.6 – Compatibilité statistique de la loi linéaire inverse (en vert) avec les observations (en noir) pour : (a) l'époque 2005 de CHAOS-3 ; (b) la période 1840-1990 de *gufm1* ; (c) une époque arbitraire de notre séquence dynamo ; (d) une période arbitraire de $10 \cdot \tau_{SV}$ de notre séquence dynamo. Les droites d'ajustement sont représentées avec des barres de dispersion statistique à 90% déduites des densités de probabilité $F^{(2n+1)N_n, (2n+1)N_n}((\tau_n/\bar{\tau}_n)^2)$ prédites par le modèle SIS.

domaine d'application du modèle SIS (c'est-à-dire pour $n \geq 2$), nous constatons que les observations τ_n^{obs} (représentées par des étoiles) sont effectivement comprises dans la barre de dispersion statistique du modèle SIS pour loi linéaire inverse.

A partir du formalisme développé dans la section 3.3.2, le même exercice peut être proposé pour les temps de corrélation τ_n^* issus de spectres moyens, dont nous attendons qu'ils fluctuent autour de la valeur théorique $\bar{\tau}_n$ de telle sorte que le processus aléatoire $(\tau_n^*/\bar{\tau}_n)^2$ suive une loi de Fisher à $((2n+1) \cdot N_n, (2n+1) \cdot N_n)$ degrés de liberté. Nous représentons ainsi à la figure 3.6d les temps de corrélation $\bar{\tau}_n$ (obtenus avec notre algorithme pour la loi linéaire inverse) avec leurs barres de dispersion statistique à 90% (dédites à partir des densités de probabilité $F^{(2n+1)N_n, (2n+1)N_n}(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$). A l'exception du dipôle, nous obtenons que les observations sont effectivement comprises dans la barre de dispersion statistique du modèle SIS pour la loi linéaire inverse.

3.6 Conclusion

Résumé des résultats

Dans ce chapitre, nous avons montré sur une séquence dynamo que la dispersion des temps de corrélation τ_n correspondait avec un très bon accord aux fluctuations statistiques prédites par le modèle SIS proposé par Hulot et Le Mouél [1994] (qui postule entre autres que les coefficients de Gauss sont des processus aléatoires gaussiens). En nous appuyant à la fois sur des modèles de champ géomagnétiques et une séquence dynamo, nous avons également montré que la loi linéaire inverse $\bar{\tau}_n = \tau_{\text{SV}}/n$ pour le champ non-dipolaire ($n \geq 2$) était qualitativement satisfaisante pour expliquer la décroissance des $\bar{\tau}_n$ avec le degré n en harmoniques sphériques, et qu'elle était de plus compatible avec les fluctuations naturelles des τ_n . A partir des modèles CHAOS-3, GRIMM-2 et POMME-6 évalués en 2005, nous en avons déduit la valeur $\tau_{\text{SV}} = 415 \pm_{45}^{55}$ ans pour le champ magnétique terrestre.

Interprétation de la loi linéaire inverse

A partir de considérations dimensionnelles simples autour de l'équation de l'induction projetée à la frontière noyau-manteau, Holme et Olsen [2006] proposent que $\bar{\tau}_n \propto n^{-1}$ lorsque la variation séculaire est dominée par l'advection, et que $\bar{\tau}_n \propto [n(n+1)]^{-1}$ lorsque la variation séculaire est dominée par la diffusion. Notre étude, qui met en évidence un exposant γ proche de 1 pour la loi puissance $\bar{\tau}_n = \delta \times n^{-\gamma}$, suggère ainsi que la variation séculaire serait plutôt gouvernée par un processus de transport. Cette interprétation est d'ailleurs étayée par la dépendance linéaire inverse de τ_{SV} avec le nombre de Reynolds magnétique obtenue par Christensen et Tilgner [2004] sur une suite de dynamos numériques. La loi linéaire inverse a donc l'avantage de reposer sur une interprétation physique simple.

Applications possibles de l'échelle de temps de la variation séculaire

D'un point de vue applicatif, l'échelle de temps de la variation séculaire peut tout d'abord être utilisée pour extrapoler un temps caractéristique d'une simulation numérique vers la dynamo terrestre. Cette méthode a été initialement employée par Christensen et Tilgner [2004] pour estimer le temps de dissipation magnétique de la dynamo terrestre. Nous l'utiliserons également dans le chapitre suivant de cette thèse pour déterminer la portée de prédictibilité de la dynamo terrestre.

L'échelle de temps de la variation séculaire peut également être utilisée pour remettre à l'échelle l'axe du temps d'une simulation numérique vers un axe du temps « terrestre ». Cette méthode a par exemple son intérêt dans une perspective d'assimilation des données géomagnétiques où il s'agirait de prédire le champ magnétique des années à venir à partir d'une simulation dynamo correctement choisie [voir p.ex. Fournier *et al.*, 2010]. Comme nous avons vu qu'il existait un continuum entre les estimations de τ_{SV} déduites des spectres instantanées et celles déduites des spectres moyens, τ_{SV} est également approprié pour décrire la dynamique du champ magnétique terrestre sur des échelles de temps plus longues que celles de l'enregistrement historique. Nous utiliserons ainsi τ_{SV} dans le chapitre 5 pour remettre à l'échelle l'axe du temps de longues simulations dynamo dans un dessein de comparaison avec les données paléomagnétiques. Nous montrerons l'avantage de cette méthode par rapport à une remise à l'échelle du temps classique fondée soit sur le temps de diffusion magnétique, soit sur le temps de décroissance du dipôle.

Utilisation pratique de l'échelle de temps de la variation séculaire

Pour déterminer une estimation robuste de τ_{SV} à partir des modèles de champ géomagnétiques, nous avons employé un algorithme basé sur des distributions de Fisher pour prendre en compte les fluctuations naturelles des temps de corrélation. Lorsqu'on travaille sur des spectres moyens, ce choix s'avère cependant moins crucial puisque l'augmentation du nombre de degrés de liberté diminue l'asymétrie des distributions de Fisher. Celles-ci se rapprochent de distributions gaussiennes et il devient alors légitime d'utiliser un algorithme de moindres carrés. Par souci de simplicité, nous recommanderions donc de recourir à un algorithme de moindres carrés pour déterminer la valeur de τ_{SV} à partir des spectres moyens d'une simulation dynamo.

Chapitre 4

Prédictibilité à court terme du champ magnétique terrestre¹

To constrain the forecast horizon of geomagnetic data assimilation, it is of interest to quantify the range of predictability of the geodynamo. Following earlier work in the field of dynamic meteorology, we investigate the sensitivity of numerical dynamos to various perturbations applied to the magnetic, velocity and temperature fields. These perturbations result in some errors, which affect all fields in the same relative way, and grow at the same exponential rate $\lambda = \tau_e^{-1}$, independent of the type and the amplitude of perturbation. Errors produced by the limited resolution of numerical dynamos are also shown to produce a similar amplification, with the same exponential rate. Exploring various possible scaling laws, we demonstrate that the growth rate is mainly proportional to an advection timescale. To better understand the mechanism responsible for the error amplification, we next compare these growth rates with two other dynamo outputs which display a similar dependence on advection: the inverse τ_{SV}^{-1} of the secular-variation timescale, characterising the secular variation of the observable field produced by these dynamos; and the inverse $(\tau_{diss}^{mag})^{-1}$ of the magnetic dissipation time, characterising the rate at which magnetic energy is produced to compensate for Ohmic dissipation in these dynamos. The possible role of viscous dissipation is also discussed via the inverse $(\tau_{diss}^{kin})^{-1}$ of the analogous viscous dissipation time, characterising the rate at which kinetic energy is produced to compensate for viscous dissipation. We conclude that τ_e tends to equate τ_{diss}^{mag} for dynamos operating in a turbulent regime with low enough Ekman number, and such that $\tau_{diss}^{mag} < \tau_{diss}^{kin}$. As these conditions are met in the Earth's outer core, we suggest that τ_e is controlled by magnetic dissipation, leading to a value $\tau_e = \tau_{diss}^{mag} \approx 30$ yr. We finally discuss the consequences of our results for the practical limit of predictability of the geodynamo.

¹Ce chapitre est une reproduction de l'article de recherche « Earth's dynamo limit of predictability controlled by magnetic dissipation » (F. Lhuillier, J. Aubert, G. Hulot) accepté pour publication à *Geophysical Journal International*. Il complète les résultats de la lettre « Earth's dynamo limit of predictability » (G. Hulot, F. Lhuillier, J. Aubert) publiée à *Geophysical Research Letters* et reproduite dans l'annexe B de ce mémoire.

4.1 Introduction

It is now well established that the Earth's main magnetic field is generated by a dynamo operating in the liquid iron core. Since the advent of the first three-dimensional self-consistent dynamo simulations [Glatzmaier et Roberts, 1995a,b, Kageyama *et al.*, 1995], numerous dynamo models have been published and have gradually succeeded in reproducing the main properties of the geomagnetic field [Christensen et Wicht, 2007]. These models have led to a better understanding of the physical mechanisms at work and a better assessment of various possible approximations. In conjunction with the advent of continuous satellite measurements [Friis-Christensen *et al.*, 2006, Hulot *et al.*, 2007], they have recently paved the way for promising strategies of data assimilation [Fournier *et al.*, 2007, Kuang *et al.*, 2008, Fournier *et al.*, 2010]. Using schemes similar to those routinely used in weather forecasting centres, they could be employed one day to improve on the current forecasts of the geomagnetic field [Maus *et al.*, 2008, Beggan et Whaler, 2009, Silva *et al.*, 2010, Finlay *et al.*, 2010a]. Given the nonlinear nature of the equations governing the atmospheric dynamics, we know however that weather forecasts have a limited range of predictability [see e.g. Kalnay, 2002]. In the present study we draw inspiration from pioneering work in the field of dynamic meteorology and investigate the limit of predictability that such geomagnetic forecasts would ineluctably have to face. This amounts in practice to exploring how much time in advance a geomagnetic prediction could reasonably be made.

Numerical weather forecasting progressed from an experimental to an operational procedure, thanks to the increase in computer power and an improved understanding of the physical processes that govern the atmospheric dynamics. Meteorologists quickly came to grips with the problem of the limit of weather predictability, and initially ascribed it to a combination of the insufficient knowledge of the initial conditions and the imperfect modelling of the atmospheric dynamics. It was soon recognised that the nonlinear nature of the equations governing the dynamical system was the intrinsic cause. Lorenz [1963a,b] proved that whether or not a solution can be predicted at infinite range depends on whether or not the general character of the solution was periodic. Periodic solutions are generally stable with respect to small perturbations, and can thus be forecast at infinite range. In contrast, most non-periodic solutions are very sensitive to initial conditions, meaning that two solutions originating from slightly different initial conditions may macroscopically diverge after some finite time. To investigate this issue, meteorologists proposed a dynamical approach based on the numerical integration of twin solutions with slightly different initial conditions. They measured the errors — defined as the root-mean-square (rms) differences between the two fields of wind or temperature — and studied their rate of amplification — also known as growth rate. This approach was first tested by Lorenz [1965] on a 28-variable idealised model, and next applied by Charney *et al.* [1966] to self-consistent models of atmospheric circulation then available [Smagorinsky, 1963, Mintz, 1964, Leith, 1965]. The main result was the following. No matter how small, initial errors were found to grow at some exponential rate and eventually lead to diverging predictions. Although the details of the amplification were highly dependent on several factors, it always led to an error doubling time of about five days in the early models [Charney *et al.*, 1966]. This value reduced to 1.5 days when investigating more recent models [Simmons *et al.*, 1995]. Given the current quality of meteorological

logical data, this translates into the practical possibility of forecasting the weather up to roughly one week in advance [see e.g. Kalnay, 2002].

In the present study, we focus on chaotic dynamos (a category to which the Earth’s dynamo is expected to belong) in opposition to stationary dynamos (an example of which is the numerical dynamo benchmark of Christensen *et al.* [2001]). These particular dynamos are another class of non-periodic dynamical systems, and also display a finite limit of predictability. The problems of geomagnetic and weather forecasting are indeed very similar. They rely on the numerical integration of differential equations both involving rotating convection, and have the same technical limitations — a finite number of observations in addition to finite computational resources. One important additional difficulty in the case of dynamo simulations is that they can only be run with control parameters remote from those expected for the Earth [see e.g. Christensen et Wicht, 2007]. Too large a viscosity is for instance assumed in order to suppress small-scale turbulence that cannot be resolved with present computers. Two different approaches can be used to circumvent this difficulty. One is to choose combinations of values of the control parameters which lead to values of the magnetic Reynolds number compatible with those expected for the Earth. The magnetic Reynolds number describes the ratio of magnetic advection to magnetic diffusion and is a key parameter for describing the secular variation [Christensen et Tilgner, 2004]. The second approach involves developing scaling laws to identify the underlying physical mechanisms and then extrapolate the results from the portion of parameter space accessible to dynamo simulation to the parameter regime expected for the Earth [Christensen et Aubert, 2006, Olson et Christensen, 2006]. Both approaches are combined in this paper.

A first study of the limit of predictability of chaotic dynamos — based on an analysis of the error growth akin to that of Lorenz [1965] and his successors — was reported in Hulot *et al.* [2010b]. They introduced small errors at the initial stage of dynamo simulations and monitored the subsequent evolution of this error in several output quantities. Based on a simplified analysis of a set of simulations, they noted that the growth rate of the errors was independent of the monitored output quantity, and mainly dependent on the magnetic Reynolds number of the dynamo flow. Since the typical timescale of the magnetic secular variation displayed the same kind of dependance on the magnetic Reynolds number [Christensen et Tilgner, 2004], they empirically proposed that the ratio of the error-growth timescale to the secular-variation timescale had to be roughly constant for Earth-like parameter regimes, yielding a way to evaluate the error-growth timescale for the Earth’s dynamo.

In the present paper, we recall the method we employ (section 4.2), and extensively investigate the robustness of the error growth rate (section 4.3). We then provide a detailed discussion of the mechanism responsible for this error growth (section 4.4). This leads us to suggest that what likely governs the error growth rate in dynamos with Earth-like parameters is the magnetic dissipation time, characterising the rate at which magnetic energy is produced to compensate for Ohmic dissipation. Having summarised our key results (section 4.5), we conclude with some practical considerations on the limit of predictability of the geodynamo (section 4.6).

4.2 Models and tools

4.2.1 Numerical models

We consider fluid dynamos driven by thermal convection, which operate in an electrically conducting fluid within a spherical shell $\mathcal{V}$ of aspect ratio 0.35, rotating about the z -axis with constant angular velocity Ω . The deterministic equations governing MHD and Boussinesq convection are similar to those described by Christensen et al. [2006], namely, the induction equation for the magnetic field $\mathbf{B}$ in the MHD approximation, the Navier-Stokes and heat equations for the velocity field $\mathbf{u}$ and the temperature field T in the Oberbeck-Boussinesq approximation. Rigid mechanical boundary conditions are employed and a constant difference of temperature ΔT between the inner and outer boundaries is considered. The outer boundary is electrically insulating, whereas the inner core is electrically conducting and free to rotate along the Earth's rotation axis. The four dimensionless control parameters of the system are the modified Rayleigh number $Ra^* = \alpha g \Delta T / \Omega^2 D$ (a measure of the strength with which the dynamo is driven), the Ekman number $E = \nu / \Omega D^2$ (a measure of the relative importance of viscous to Coriolis forces), the Prandtl number $Pr = \nu / \kappa$ and the magnetic Prandtl number $Pm = \nu / \eta$. Here, D is the shell thickness, g the gravity at the outer boundary and α the thermal expansion coefficient; ν , κ and η respectively denote the viscous, thermal and magnetic diffusivities. We use the PARODY-JA implementation of the equations [see Aubert *et al.*, 2008b, for details]. This dynamo code, benchmarked against other major implementations [Christensen *et al.*, 2001], is based on a semi-spectral method. A spherical harmonic expansion in the lateral direction is combined with a second-order finite-differencing scheme in the radial direction (with geometrical progression towards the boundaries to resolve boundary layers). As only scalar fields can be projected onto the spherical harmonic basis, the solenoidal vector fields $\mathbf{B}$ and $\mathbf{u}$ are decomposed into poloidal fields B_p and u_p , and toroidal fields B_t and u_t . Time integration involves an implicit second-order Crank-Nicholson scheme for diffusion terms and an explicit second-order Adams-Bashforth scheme for the other terms. The time steps are determined according to an adaptive criterion [see Christensen *et al.*, 1999, for details].

In this study, we work with a set of 49 dynamo simulations, the features of which are summarised in Tab. 4.1. The resolutions in terms of maximum spherical harmonic degree $\ell_{\max}$ and number of radial grid levels N_r are selected so that at least a factor 50 may be found between the maximum energy and the energy at the cut-off wavelength in the kinetic and magnetic spectra. Depending on the simulation, this amounts in practice to varying $\ell_{\max}$ between 44 and 106, and N_r between 90 and 160. The Ekman number E varies from 10^{-2} to 10^{-5} , and we have chosen

²The input parameters E , Ra^* , Pm , Pr are described in the main text. All simulations have been run with $Pr = 1$, and t_{run} indicates the total run time in magnetic diffusion time $\tau_\eta = D^2/\eta$. The output parameters Re (Reynolds number), Rm (magnetic Reynolds number), Ro (Rossby number), Λ (Elsasser number) are defined as $Re = UD/\nu$, $Rm = UD/\eta$, $Ro = U/(\Omega D)$, where U is the time-averaged rms velocity over the shell $\mathcal{V}$, and $\Lambda = B^2/(\rho_0 \mu_0 \eta \Omega)$, where B is the time-averaged rms magnetic field, ρ_0 the fluid density and μ_0 the magnetic permeability. The dipolarity f_{dip} is the time-averaged rms amplitude of the dipole relative to the total field at the outer boundary. Also provided is the error growth rates $\lambda = \tau_e^{-1}$ in units of τ_η^{-1} .

Table 4.1: Set of numerical models.²

System	E	Ra^*	Pm	t_{run}	Re	Rm	Ro	Λ	Reversals?	f_{dip}	λ
(A1)	1×10^{-2}	3	10	6	13	133	1×10^{-1}	7	no	0.35	47
(A2)	1×10^{-2}	3	20	3	13	251	1×10^{-1}	29	no	0.30	102
(A3)	1×10^{-2}	6	10	6	22	222	2×10^{-1}	23	no	0.25	119
(A4)	1×10^{-2}	6	20	3	21	428	2×10^{-1}	65	yes	0.16	233
(A5)	1×10^{-2}	12	10	3	35	345	4×10^{-1}	44	yes	0.18	207
(A6)	1×10^{-2}	12	20	2	33	667	3×10^{-1}	120	yes	0.10	423
(A7)	1×10^{-2}	12	30	2	32	962	3×10^{-1}	261	yes	0.12	623
(A8)	1×10^{-2}	24	10	2	51	509	5×10^{-1}	80	yes	0.12	344
(A9)	1×10^{-2}	24	20	2	48	964	5×10^{-1}	265	yes	0.10	708
(A10)	1×10^{-2}	24	30	2	47	1416	5×10^{-1}	471	yes	0.08	1122
(B1)	1×10^{-3}	0.3	5	6	27	134	3×10^{-2}	8	no	0.55	81
(B2)	1×10^{-3}	0.3	10	3	26	255	3×10^{-2}	26	no	0.46	191
(B3)	1×10^{-3}	0.6	5	6	56	280	6×10^{-2}	2	yes	0.17	351
(B4)	1×10^{-3}	0.6	10	3	502	502	5×10^{-2}	20	yes	0.16	602
(B5)	1×10^{-3}	1.2	5	4	87	434	9×10^{-2}	12	yes	0.08	615
(B6)	1×10^{-3}	1.2	10	2	80	803	8×10^{-2}	44	yes	0.08	1231
(B7)	1×10^{-3}	1.2	15	2	78	1174	8×10^{-2}	78	yes	0.07	1936
(B8)	1×10^{-3}	2.4	5	4	132	661	1×10^{-1}	28	yes	0.07	1071
(B9)	1×10^{-3}	2.4	10	2	124	1242	1×10^{-1}	85	yes	0.06	2196
(B10)	1×10^{-3}	2.4	15	2	121	1817	1×10^{-1}	148	yes	0.05	3593
(C1)	3×10^{-4}	0.09	3	3	30	90	9×10^{-3}	5	no	0.83	78
(C2)	3×10^{-4}	0.09	6	2	28	170	9×10^{-3}	15	no	0.65	165
(C3)	3×10^{-4}	0.09	9	2	29	262	9×10^{-3}	27	no	0.56	258
(C4)	3×10^{-4}	0.18	3	3	63	188	2×10^{-2}	7	no	0.57	260
(C5)	3×10^{-4}	0.18	6	2	60	359	2×10^{-2}	20	no	0.44	520
(C6)	3×10^{-4}	0.18	9	2	59	529	2×10^{-2}	38	no	0.39	860
(C7)	3×10^{-4}	0.36	3	3	131	394	4×10^{-2}	3	yes	0.14	766
(C8)	3×10^{-4}	0.36	6	2	111	667	3×10^{-2}	24	no	0.25	1386
(C9)	3×10^{-4}	0.36	9	2	107	962	3×10^{-2}	45	no	0.22	2200
(C10)	3×10^{-4}	0.72	3	3	200	599	6×10^{-2}	11	yes	0.08	1412
(C11)	3×10^{-4}	0.72	6	2	183	1097	5×10^{-2}	38	yes	0.08	2988
(C12)	3×10^{-4}	0.72	9	2	178	1600	5×10^{-2}	67	yes	0.07	4683
(D1)	1×10^{-4}	0.05	1	4	58	58	6×10^{-3}	2	no	0.93	98
(D2)	1×10^{-4}	0.05	2	2	54	108	5×10^{-3}	4	no	0.87	156
(D3)	1×10^{-4}	0.1	1	3	114	114	1×10^{-2}	3	no	0.84	231
(D4)	1×10^{-4}	0.1	2	2	111	222	1×10^{-2}	8	no	0.66	447
(D5)	1×10^{-4}	0.2	1	3	278	278	3×10^{-2}	10	yes	0.16	735
(D6)	1×10^{-4}	0.2	2	3	251	502	3×10^{-2}	4	yes	0.13	1454
(D7)	1×10^{-4}	0.4	1	2	429	429	4×10^{-2}	3	yes	0.09	1438
(D8)	1×10^{-4}	0.4	2	2	384	768	4×10^{-2}	11	yes	0.07	2873
(D9)	1×10^{-4}	0.4	3	1	362	1086	4×10^{-2}	20	yes	0.09	4510
(D10)	1×10^{-4}	0.8	2	1	589	1177	6×10^{-2}	23	yes	0.05	4816
(E1)	3×10^{-5}	0.07	0.5	1.5	315	158	1×10^{-2}	2	no	0.84	619
(E2)	3×10^{-5}	0.14	0.5	1.5	663	332	2×10^{-2}	2	yes	0.16	1957
(E3)	3×10^{-5}	0.14	1.0	1.0	668	668	2×10^{-2}	4	yes	0.14	3662
(E4)	3×10^{-5}	0.29	0.5	1.5	1003	501	3×10^{-2}	5	yes	0.10	3128
(E5)	3×10^{-5}	0.29	1.0	1.0	940	940	3×10^{-2}	12	yes	0.07	5930
(F1)	1×10^{-5}	0.05	0.25	1.0	710	178	7×10^{-3}	2	no	0.85	1298
(F2)	1×10^{-5}	0.05	0.50	0.6	631	315	6×10^{-3}	5	no	0.75	1983

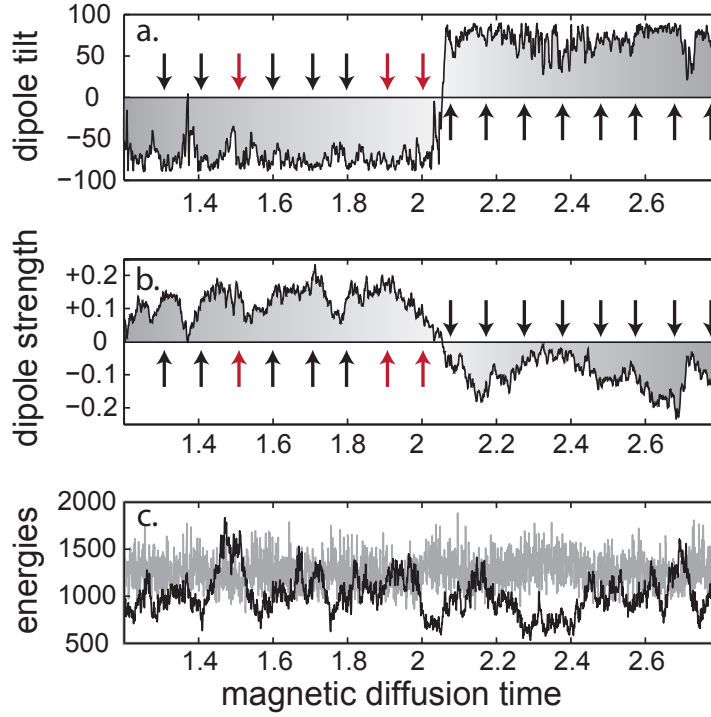


Figure 4.1: Reference time series for dynamo model B4 (see Tab. 4.1 for definitions and parameters) computed with $\ell_{\max} = 44$ and $N_r = 90$: (a) dipole tilt in degrees; (b) g_1^0 axial dipole coefficient at the outer boundary in units of $(\rho_0\mu_0\eta\Omega)^{1/2}$; (c) average magnetic (black curve) and kinetic (grey curve) energy densities over the whole shell $\mathcal{V}$ in units of $\rho_0(\nu/D)^2$. The four quantities are expressed as a function of the magnetic diffusion time τ_η . The sixteen arrows indicate the times when the perturbations are introduced for the cases illustrated in Fig. 4.2 (red) and Fig. 4.5 (all).

to explore the parameter space by alternately increasing the modified Rayleigh number Ra^* and the magnetic Prandtl number Pm , keeping $Pr = 1$. In this way, we move from dipolar dynamos characterised by a dipolarity $f_{\text{dip}} > 0.35$ to non-dipolar dynamos characterised by a dipolarity $f_{\text{dip}} < 0.35$, where f_{dip} is the time-averaged rms amplitude of the dipole relative to the total field at the outer boundary. In parallel, we also move from stable dynamos which undergo neither reversals nor significant excursions to dynamos which can reverse their polarity. The magnetic Reynolds number $Rm = UD/\eta$ (where U is the time-averaged rms velocity within the dynamo shell) evolves into a range of values from 100 to 1800, which is consistent with the range of values expected for the Earth [Christensen et Tilgner, 2004]. We extensively investigate dynamo B4, which has the advantage of not being too expensive in terms of computational time, and consequently enables us to carry out a large number of verifications. With a magnetic Reynolds number Rm of the order of 500, it exhibits reversals but has the usual drawback of being weakly dipolar [Kutzner et Christensen, 2002]. A reference time series, against which other perturbed solutions will be compared, is presented in Fig. 4.1. It is computed with ($\ell_{\text{max}} = 44, N_r = 90$) and spans about 1.5 magnetic diffusion times. A polarity reversal occurs at around 2 magnetic diffusion times, whereas the polarity is globally maintained during the rest of the time. Note that all time series will be plotted in units of magnetic diffusion time $\tau_\eta = D^2/\eta$ in the rest of the study.

4.2.2 Perturbative method

To investigate the growth of the errors, we first introduce various types of well-controlled perturbations in spectral space. We next monitor the departure of the perturbed solutions from the reference solution.

Type-1 perturbations refer to the simple case of radially homogeneous perturbations introduced in the axial dipole component g_1^0 of the poloidal magnetic field B_p throughout the whole shell $\mathcal{V}$. This is a natural choice since the dipole field is an important feature of the magnetic field observed outside the core. At one given step t_0 of the simulation, we thus set

$$\forall r \in \mathcal{V}, \quad \widetilde{g}_1^0(r, t_0) = g_1^0(r, t_0) \cdot (1 + \varepsilon), \quad (4.1)$$

where g_1^0 is the axial dipole strength of the reference solution, $\widetilde{g}_1^0$ is the strength of the perturbed solution and ε is the amplitude of the perturbation. In this study, we rely on double precision calculations and choose amplitudes from 10^{-2} to 10^{-10} .

Type-2 perturbations are more general and correspond to introducing random perturbations in all harmonic modes y_n^m of the poloidal magnetic field B_p (type 2a), of the poloidal velocity field u_p (type 2b) or of the temperature field T (type 2c). The perturbations are still homogeneous in the radial direction but are now random in the lateral direction. At one given step t_0 of the simulation, we thus set

$$\forall r \in \mathcal{V}, \quad \widetilde{y}_n^m(r, t_0) = y_n^m(r, t_0) \cdot (1 + \alpha_n^m \varepsilon), \quad (4.2)$$

where the harmonic potentials y_n^m and $\widetilde{y}_n^m$ denote the reference and perturbed solutions, the α_n^m are random numbers which verify a normal law of zero mean and unit variance, and ε is the amplitude of the perturbation (varying from 10^{-2} to 10^{-10} as previously). The integers n and m denote the degrees and orders of the spherical harmonic expansion respectively. In both types 1 and 2, the perturbations are impulsive in time, meaning that the reference and perturbed fields independently evolve according to the same equations after the perturbation is introduced.

To monitor the departure of the perturbed solutions from the reference solution, we define, for any harmonic potential $y_n^m(t)$, the normalised error

$$\Delta y_n^m(r, t) = [\widetilde{y}_n^m(r, t) - y_n^m(r, t)] / \sqrt{\langle [y_n^m(r, t)]^2 \rangle}, \quad (4.3)$$

and in particular the axial dipole error

$$\Delta g_1^0(r, t) = [\widetilde{g}_1^0(r, t) - g_1^0(r, t)] / \sqrt{\langle [g_1^0(r, t)]^2 \rangle}, \quad (4.4)$$

where the angle brackets define time averaging. More generally, it will prove convenient to define a normalised rms error for any harmonic degree,

$$\Delta y_n(r, t) = \sqrt{\frac{1}{(2n+1)} \sum_{m=0}^n |\Delta y_n^m(r, t)|^2}, \quad (4.5)$$

which provides a more diagnostic view of the subsequent evolution of the errors. As we observe that the response of the dynamo system to the perturbations is large-scale, it is not necessary to integrate the different errors over the whole outer shell. Rather, the rms magnetic errors — which refer to the poloidal magnetic field B_p — are evaluated at the core-mantle boundary, whereas the rms flow and temperature errors — which respectively refer to the poloidal velocity field u_p and the temperature field T — are evaluated at mid-depth of the shell.

4.3 Robustness of the error growth

We start by illustrating the way any perturbation introduced in a given reference simulation results in a subsequent exponential growth of the errors in all fields (magnetic, flow and temperature). This is first shown for a case study, where we focus on the behaviour of the dipole field after an error is introduced in the axial dipole. Next, we show that a similar error growth can be found in all fields — independent of the type, the amplitude and the time of the perturbation introduced — and proceed to quantify the remarkably little variability displayed by the corresponding growth rates. Finally, we investigate the impact of the limited resolution of numerical solutions, which does not affect the estimated growth rates, but produces quantifiable errors that also grow with the same rate.

4.3.1 Error growth for a case study

For this case study, we focus on dynamo B4. In the reference time series presented in Fig. 4.1, type-1 perturbations (computed with the help of Eq. 4.1) were introduced at three given stages of the simulation: $t_0 = 1.51$, half a magnetic time before the reversal ; $t_0 = 1.9$, at the onset of the reversal ; $t_0 = 2$, when the reversal is under way. In each case, three amplitudes of perturbation were tested: 10^{-2} , 10^{-6} and 10^{-10} . Nine different perturbed solutions were thus produced, the evolutions of which are shown in Fig. 4.2. Fig. 4.2a details the long-term evolution of the perturbed solutions and underlines the difficulty in predicting the long-term behaviour of the perturbed solutions from the reference one. The reversal of the reference time series may be in certain cases slightly altered, in other cases impeded, otherwise it is changed into an excursion. It is then possible to conclude that the reference and perturbed solutions evolve with no apparent relationship. In parallel with this first conclusion, Fig. 4.2b focusing on the time shortly after the introduction of the perturbation, shows that the lapse of time after which the reference and perturbed solutions drift apart depends on the amplitude of this perturbation. As could be expected, perturbed solutions separate first for the largest perturbation (10^{-2} , vertical red line), next for the medium perturbation (10^{-6} , vertical green line), and finally for the smallest perturbation (10^{-10} , vertical blue line). It is of interest that the time interval between the red and green vertical lines is approximately equal to the time interval between the green and blue vertical lines. This indicates that, every time the amplitude of the perturbation is changed by the same factor (here 10^{-4}), the same delay is introduced before the perturbed solution separates from the reference solution. This is a first clear indication of the exponential growth of the errors resulting from the perturbations.

Fig. 4.2c presents the modulus of the axial dipole error as a function of time in a semi-logarithmic scale. It demonstrates the exponential character of the error growth, and reveals three main stages in the evolution of the perturbed solutions : a mobilisation phase, an exponential-growth phase and a free-development phase. The first phase, which lasts about one hundredth of magnetic time in the present case, does not depend on the amplitude of the initial perturbation. It can be interpreted as the response time of the system, during which the initial perturbation is communicated to all harmonic potentials. The second phase describes the exponential growth of the errors. As previously observed, the duration of this phase depends on the amplitude of the initial perturbation. The smaller this amplitude, the longer the duration of this phase. Note that this exponential-growth phase is much longer than the mobilisation phase, which will consequently be neglected in the rest of this study. Another important feature is that the exponential growth appears to be independent of the time and amplitude of the initial perturbation, suggesting that the parameter regime investigated here is associated with a single dominant growth rate. The second phase ends when the perturbation reaches a macroscopic level which approximately corresponds to the unperturbed g_1^0 time-averaged value. Once this threshold value has been reached, the solutions then evolve with no apparent relationship to the reference solution.

We now try to quantify the dominant growth rate we identified. When $g_1^0(t)$ is perturbed with

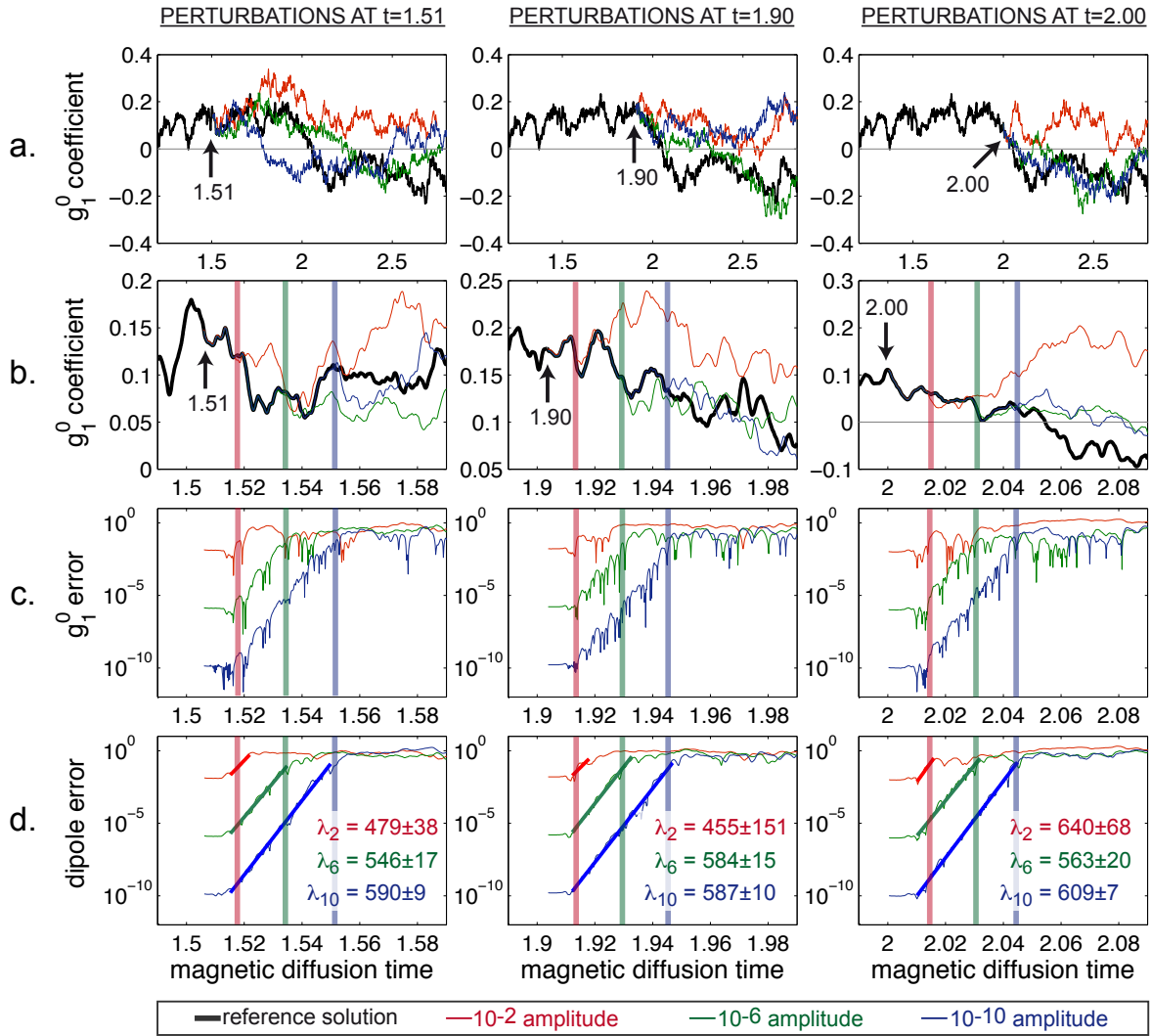


Figure 4.2: Consequences of introducing non-random perturbations in the g_1^0 axial dipole coefficient of dynamo B4 at three times ($t_0 = 1.51$, $t_0 = 1.9$, $t_0 = 2.0$) highlighted in red in Fig. 4.1. The reference time series is represented in black, whereas the perturbed time series are represented in red, green and blue, according to the amplitude of perturbation. The four panels show: (a) long-term evolution of the perturbed solutions ; (b) short-term evolution of the perturbed solutions ; (c) modulus of the axial dipole error (i.e. $\ln |\Delta y_1^0|$ for the poloidal magnetic field B_p) in a semi-logarithmic plot ; (d) modulus of the dipole error (i.e. $\ln |\Delta y_1|$ for the poloidal magnetic field B_p) in a semi-logarithmic plot. The colour vertical lines indicate the time after which the reference and perturbed solutions drift apart in panel (b), which actually corresponds to the beginning of the free-development phase. For any of the amplitudes 10^{-2} , 10^{-6} , 10^{-10} of perturbation and any of the three times of perturbation, the exponential growth rates λ_2 , λ_6 and λ_{10} of panels (d) were computed together with their uncertainty at 95% confidence level (in units of τ_η^{-1}) as described in section 4.3.1.

an initial amplitude ε , the averaged exponential growth can formally be written as

$$\Delta g_1^0(t) = \Delta g_1^0(0) \exp(\lambda_1^0 t), \quad (4.6)$$

where λ_1^0 defines the averaged growth rate. Supposing that the initial perturbation $\Delta g_1^0(0) = \varepsilon$ reaches a macroscopic level $\Delta g_1^0(\Delta t) = 1$ in a lapse of time Δt , this growth rate can then be estimated from:

$$\lambda_1^0 = \frac{1}{\Delta t} \ln \left[\frac{\Delta g_1^0(0)}{\Delta g_1^0(\Delta t)} \right] = \frac{\ln(\varepsilon)}{\Delta t}. \quad (4.7)$$

Using this formula is however not very convenient since $\Delta g_1^0(t)$ displays some variability (recall Fig. 4.2c). Fortunately, analogous averaged growth rates can be defined for each harmonic mode of the poloidal magnetic field B_p and toroidal magnetic field B_t . These appear to be essentially identical and we choose to compute an estimate of their common value for each degree n of B_p , using the normalised rms errors Δy_n (Eq. 4.5). Fig. 4.2d shows for instance the modulus of the dipole error (i.e. $|\Delta y_1|$ for the poloidal magnetic field B_p) as a function of time for the three instants and amplitudes of perturbation previously defined. The growth rate λ , which corresponds to the inverse of the e-folding time τ_e , can then be calculated using least-squares linear regression. In addition, the posterior covariance matrix can be used to quantify the uncertainty of each individual estimate of the growth rate at 95% confidence level (equivalent to 2σ). Not surprisingly, this uncertainty is largest when perturbations of amplitude 10^{-2} are introduced, and the growth rate is less well recovered (see Fig. 4.2d). For smaller perturbations the uncertainty is however small enough and it appears that the recovered growth rates slightly fluctuate depending on the time and the amplitude of the initial perturbation. Ignoring the perturbations of amplitude 10^{-2} , the growth rates (measured in units of τ_η^{-1}) cover a restricted range of values of mean $\mu = 580$ and standard deviation $\sigma = 22$. In the following paragraph we discuss the variability of these growth rates when a larger variety of perturbations is introduced.

4.3.2 Variability of the error growth

We first assess the consequence of introducing other types of perturbations at a given time. For this purpose, type-2 perturbations (computed with the help of Eq. 4.2) are introduced at $t_0 = 1.51$ in dynamo B4. The amplification of the resulting errors in the first eight degrees (i.e. for Δy_n with $n = 1$ to 8) of the various fields (magnetic, velocity and temperature) is illustrated in Fig. 4.3. With the same amplitudes as previously, three types of perturbations are tested : magnetic perturbations (type 2a, upper panels), flow perturbations (type 2b, middle panels), and thermal perturbations (type 2c, lower panels). Three monitoring quantities are also considered : rms magnetic errors (left column), rms flow errors (middle column), and rms temperature errors (right column). Fig. 4.3 shows that the mobilisation phase can be seen as the time required for the magnetic, flow and temperature relative errors to become of equal amplitude. An exponential growth is then observed, regardless of the type of perturbation, the amplitude of perturbation, and the monitoring quantity. For each monitoring quantity, the growth rate and its uncertainty at 95% confidence level are calculated using least-squares linear regression, by simultaneously

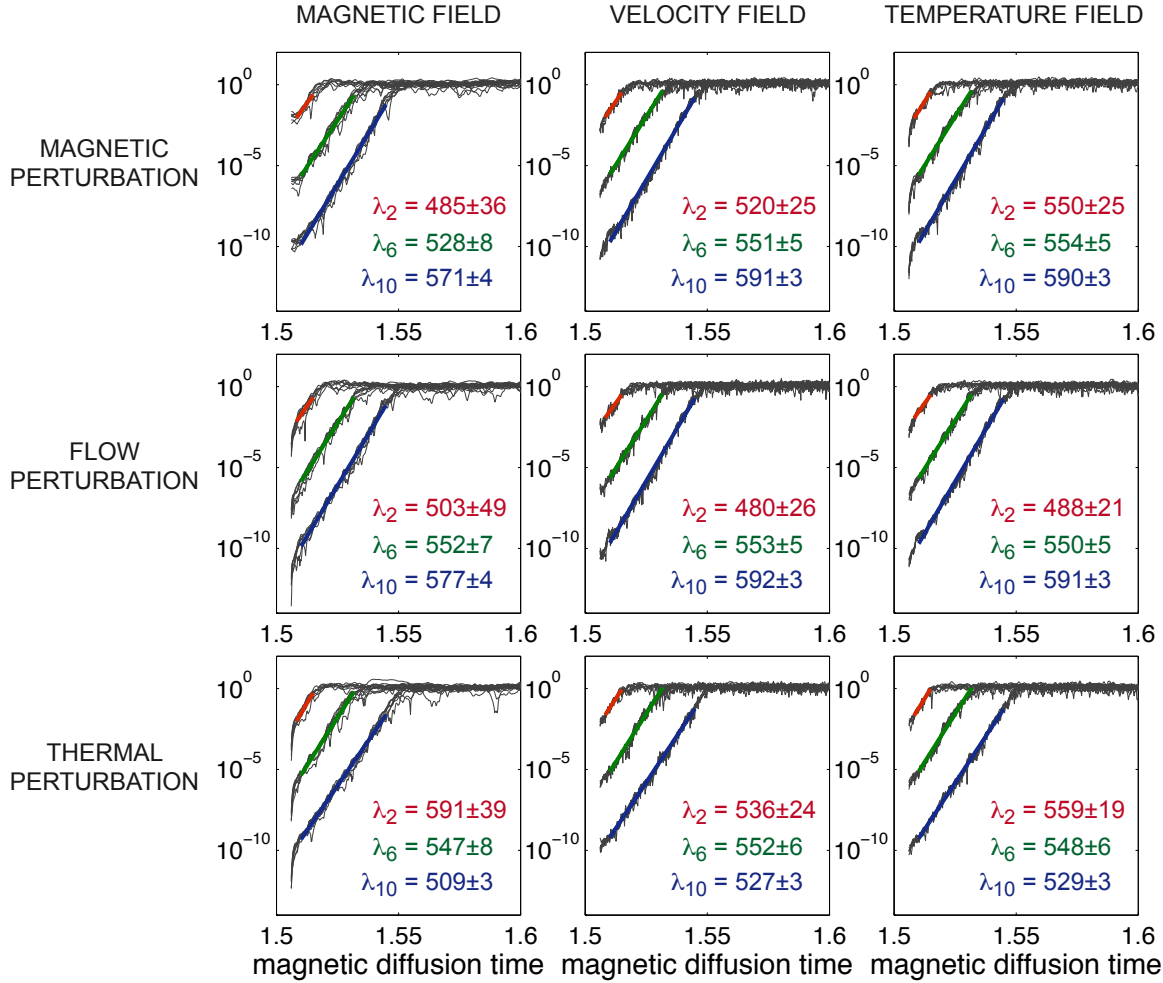


Figure 4.3: Consequences of introducing random perturbations in dynamo B4 at $t_0 = 1.51$. The first line corresponds to magnetic perturbations (type 2a), the second line to flow perturbations (type 2b) and the third line to thermal perturbations (type 2c) at the initial time. The first column represents magnetic errors, the second column flow errors and the third column thermal errors, as defined by the normalised rms errors $\Delta y_n(t)$ and plotted for $n = 1$ to 8. Three amplitudes of perturbation were tested : 10^{-2} in red, 10^{-6} in green, 10^{-10} in blue. The exponential growth rates λ_i are determined using least-squares linear regression, simultaneously over the first eight Δy_n errors. They are as previously estimated with a confidence level of 95%.

considering the first eight Δy_n errors. The time window used to infer the growth rate is manually determined, in order to start after the mobilisation phase and stop when the rms error reaches a macroscopic level. This growth rate displays a slight variability, depending on the type of perturbation, the amplitude of perturbation and the monitoring quantity.

To better quantify this variability, we chose to investigate numerous cases when magnetic perturbations were applied. For each of the five considered amplitudes (10^{-2} , 10^{-4} , 10^{-6} , 10^{-8} , 10^{-10}), one hundred random perturbations were introduced (still at time $t_0 = 1.51$ in dynamo B4). Histograms of the magnetic, kinematic and thermal growth rates (again computed by simultaneously considering the errors in the first eight degrees of the monitoring quantity) are presented in Fig. 4.4, where values were collected in bins with width comparable to the 95% confidence level with which each individual estimate was recovered. These plots again confirm that individual estimates are recovered with sufficient accuracy that, for each observed quantity, the intrinsic variability of the growth rate with respect to the perturbation introduced can be assessed. This variability can be quantified by fitting each histogram with a normal distribution, providing estimates of the mean μ and standard deviation σ . This standard deviation does not exceed 6% of the mean value. Disregarding the perturbations of amplitude 10^{-2} as previously, a standard deviation of less than 3% is found between the histograms, which confirms that the growth rates are not significantly different. The exponential growth is slightly slower for the perturbations of amplitude 10^{-2} but this behaviour may be justified by the fact that the system rapidly saturates and does not have the time to produce a regular exponential growth.

To finally assess the variability of the growth rate as a function of the time of perturbation, magnetic, flow and temperature perturbations of amplitude 10^{-10} were introduced in dynamo B4 at each of the different times highlighted in Fig. 4.1. The values of the magnetic, kinematic and thermal growth rates (computed in the same manner) are plotted in Fig. 4.5. At any given time, the growth rate is fairly independent of the perturbation introduced and the monitoring quantity, with a standard deviation of the order of 3% in the present case. The main source of variability thus stems from the time of the perturbation, with a standard deviation of the order of 6% in the present case. No correlation has been found between the growth rate and the magnetic or kinetic energies.

To sum up, the variability of the growth rate is the result of two main contributions : (1) a temporal variability of the order of 6%, depending on the time the perturbation is introduced but uncorrelated with macroscopic energies ; (2) an intrinsic variability generally of the order of 3% due to the introduction of random perturbations at the initial time. Type and amplitude of perturbation are not determining factors, except for the case when the amplitude is strong and the system saturates. The variations of the growth rate are at any rate limited and do not contradict the idea that the growth rate represents a general feature of the dynamo mean state. We thus conclude that a characteristic growth rate can be determined for each dynamo simulation.

For all the results discussed in section 4.4, growth rates are computed in the following way. For each dynamo solution, magnetic random perturbations of amplitude 10^{-10} are introduced at ten different times over a period of at least one magnetic diffusion time. Magnetic random perturbations have been arbitrarily chosen, since the three types of perturbation lead to the same

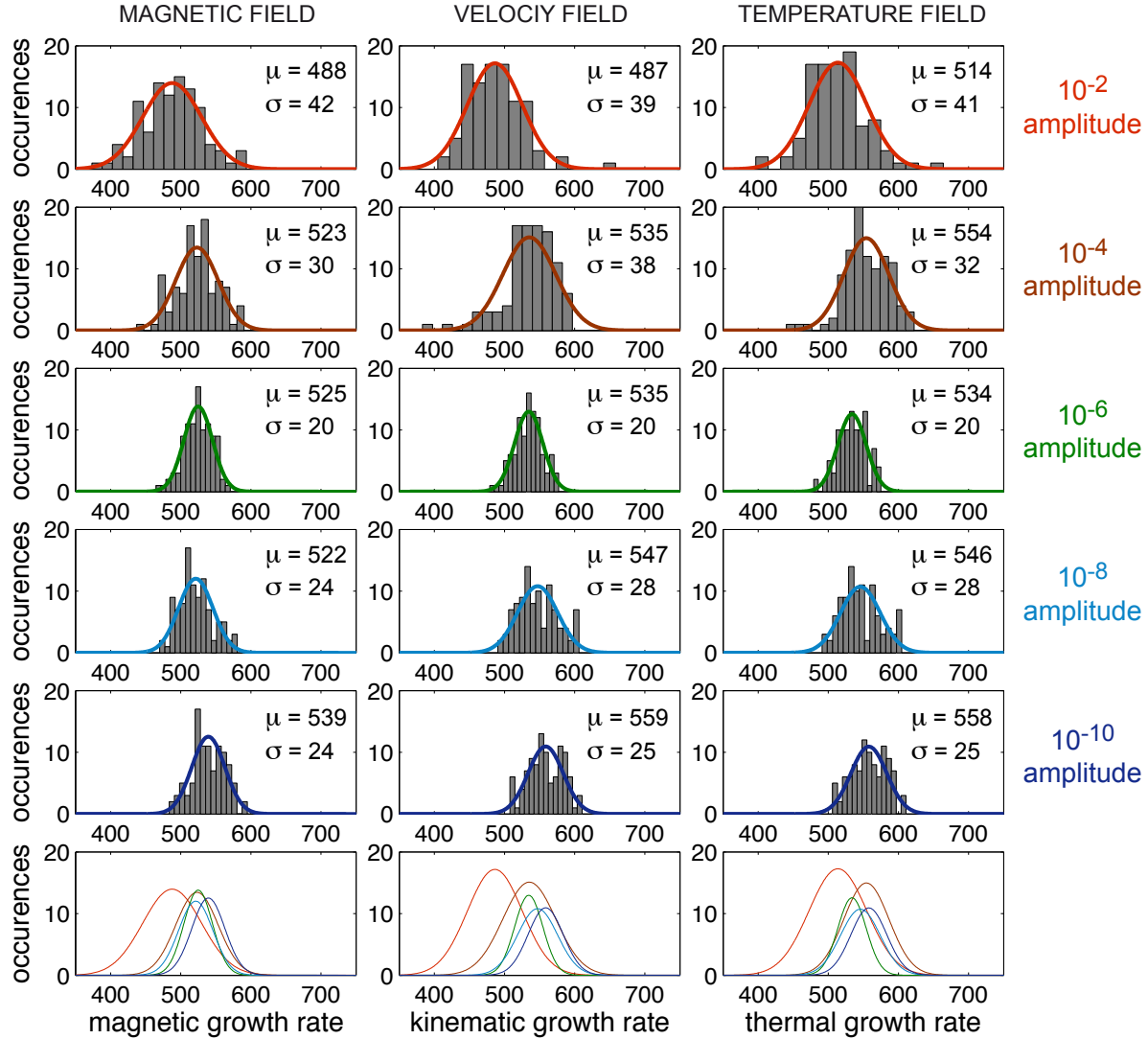


Figure 4.4: Histograms of the magnetic (column 1), kinematic (column 2) and thermal (column 3) growth rates for magnetic perturbations introduced in dynamo B4 at time $t_0 = 1.51$. The histograms are modelled by normal distributions, the mean μ and standard deviation σ of which are indicated at the right of each panel (in units of τ_η^{-1}). The first five lines show histograms for amplitudes of perturbation from 10^{-2} to 10^{-10} . The sixth line is a summary of the results.

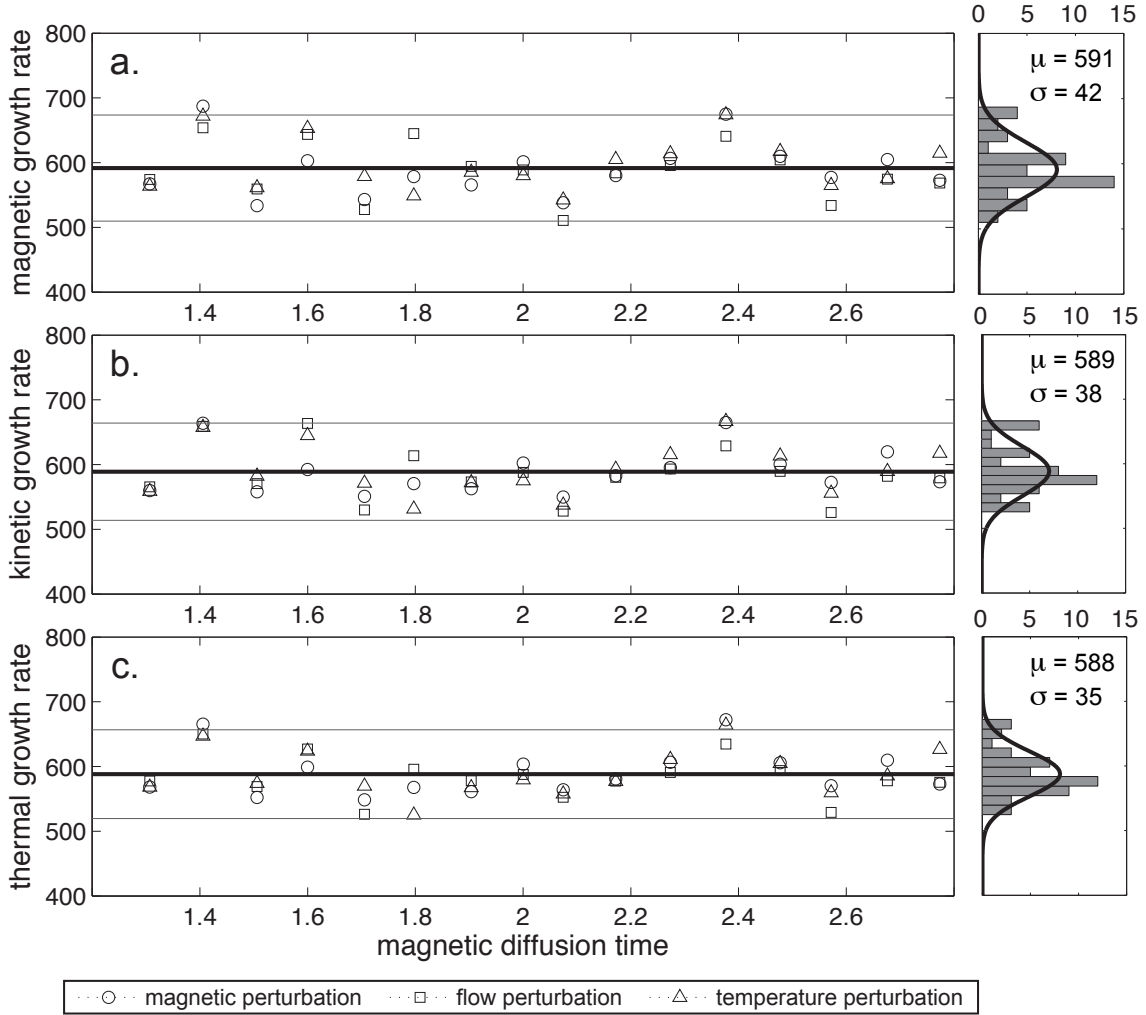


Figure 4.5: Variability of the growth rate as a function of time for dynamo B4. Random perturbations of amplitude 10^{-10} were introduced at the sixteen times highlighted in Fig. 4.1. Magnetic, flow and temperature perturbations were alternately tested. The three panels depict: (a) the magnetic growth rates; (b) the kinematic growth rates; (c) the thermal growth rates. The histograms on the right show the distribution of the growth rates, irrespective of the type of perturbation. They can be modelled by normal distributions, the mean μ and standard deviation σ of which are indicated on the right of each panel (in units of τ_η^{-1}).

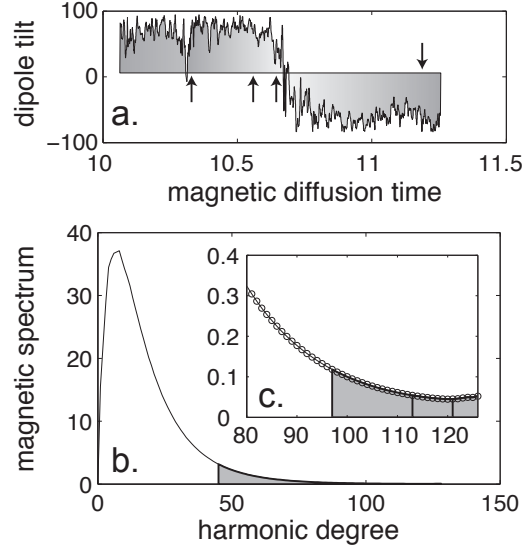


Figure 4.6: Extended reference time series for dynamo B4 (see Tab. 4.1) computed with $\ell_{\max} = 128$ and $N_r = 96$: (a) dipole tilt in degrees; (b) magnetic spectrum integrated over the whole shell $\mathcal{V}$ (in units of $\rho_0\mu_0\eta\Omega$); (c) enlargement of the spectrum tail. Arrows in panel (a) indicate times when tests are applied, whereas the vertical black lines in panels (b)-(c) correspond to the various values of ℓ_{tr} (44, 96, 112 and 120) considered in our tests.

growth rate; and weak amplitudes of perturbation have been favoured, since they lead to more accurate estimates of the slope. Growth rates are next jointly determined over the first eight harmonic degrees of the magnetic errors for each of the ten perturbation times, with the same procedure as previously described. The corresponding ten estimates are finally used to obtain an averaged growth rate λ together with its uncertainty at 95% confidence level. The corresponding values of λ and its associated $\tau_e = \lambda^{-1}$ are provided in Tab. 4.1.

4.3.3 Impact of limited resolution

Instead of introducing initial perturbations of known amplitude, we now wish to explore the impact of limited spatial resolution. To illustrate this point, we rely on dynamo B4 with a higher angular spatial resolution than previously ($\ell_{\max} = 128$ instead of $\ell_{\max} = 44$). Fig. 4.6a presents the dipole tilt associated with this extended reference time series, and Fig. 4.6b its magnetic spectrum integrated over the whole shell $\mathcal{V}$.

In a first series of tests we removed the energy in the small scales of the magnetic field (both poloidal and toroidal) by setting to zero all spherical harmonic degrees beyond a given degree ℓ_{tr} , at a given time step t_0 . The reset solution is next left free to evolve with the same resolution as the extended reference time series. These tests were carried out for four different times t_0

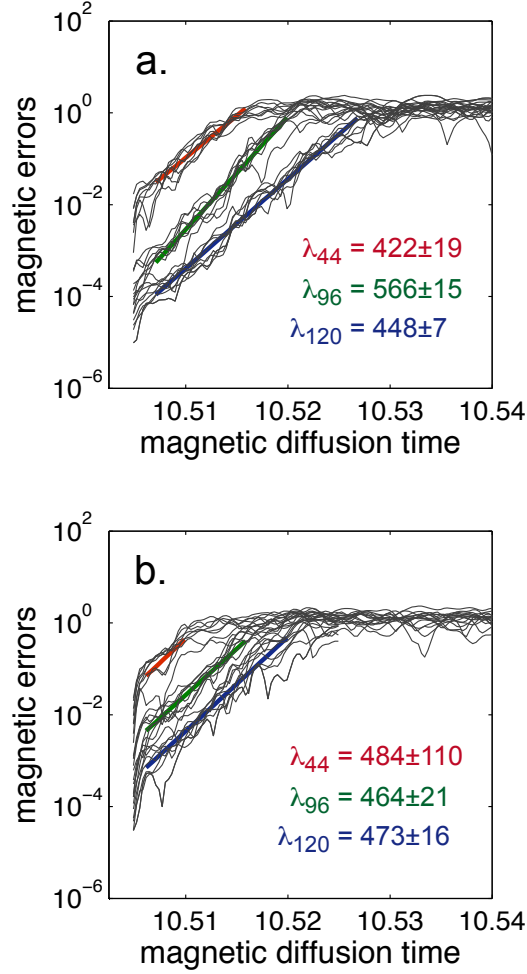


Figure 4.7: Impact of limited spatial resolution in dynamo B4: (a) magnetic error growth (as measured by the normalised poloidal field rms errors Δy_n for $n = 1$ to 8) after setting to zero all spherical harmonic degrees of the magnetic field (both poloidal and toroidal) beyond degrees ℓ_{tr} in the extended reference time series of Fig. 4.6a, at time step $t_0 = 10.505$; (b) magnetic error growth (measured as in (a)) after permanently setting to zero all spherical harmonic degrees of all fields (magnetic, flow and temperature) beyond degrees ℓ_{tr} in the extended reference time series, from time step $t_0 = 10.505$. In both (a) and (b), three values of ℓ_{tr} (44, red; 96, green; and 120, blue) were shown and the growth rates (in units of τ_η^{-1}) were estimated with their uncertainties at 95% confidence level.

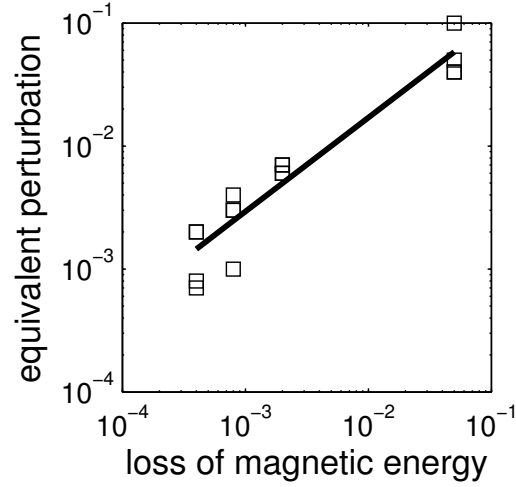


Figure 4.8: Log-log plot of the equivalent magnetic perturbation as a function of the relative contribution of the non-modelled small-scale magnetic field to the total magnetic field energy over the entire core (see text for details).

(see Fig. 4.6a), and four different truncation degrees ($\ell_{\text{tr}} = 44, 96, 112$ and 120). As illustrated in Fig. 4.7a for the poloidal magnetic field when the reset takes place at time $t_0 = 10.505$, the rms errors Δy_n (computed from Eq. 4.5) exponentially grow. The growth rates (calculated by least-squares linear regression, by simultaneously considering the first eight Δy_n) are moreover consistent with those previously inferred for dynamo B4 (within the variability already discussed in section 4.3.2). This underlines the generality of the error growth mechanism, and indicates that its value does not significantly depend on the spatial resolution of the simulations.

To assess more directly the impact of limited spatial resolution in numerical simulations, we carried out a second series of tests. We permanently set to zero all spherical harmonic degrees of all fields (magnetic, flow and temperature) beyond a given degree ℓ_{tr} , starting at a given time step t_0 . As illustrated in Fig. 4.7b for the poloidal magnetic field when the change in resolution takes place from time t_0 , we found again that the rms errors Δy_n (computed from Eq. 4.5) exponentially grow, and that the recovered growth rates are consistent with those previously inferred for dynamo B4. It thus appears that two dynamo solutions, starting from the same initial state but only contrasting by their level of resolution, will differ by an error growing exponentially with the same growth rate as an error resulting from an initial seed perturbation introduced in either of the two solutions.

As shown in Fig. 4.7b, the error is larger when the level of resolution is lower. In order to quantify this trend, we plotted in Fig. 4.8 the equivalent magnetic perturbation (i.e. the amplitude at which the rms errors Δy_n begin to grow after the brief mobilisation phase in Fig. 4.7b) as a function of the loss of magnetic energy due to the non-modelled small scales (i.e. the ratio of the truncated tail of the magnetic spectrum to the entire magnetic spectrum, see Fig. 4.6b,c). It

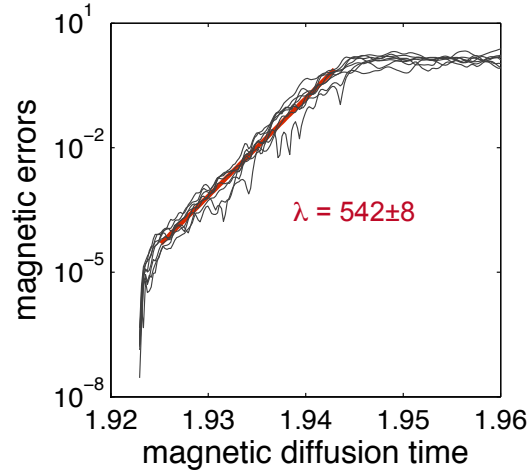


Figure 4.9: Impact of limited temporal resolution in dynamo B4 as illustrated by the growth of the magnetic errors Δy_n for $n = 1$ to 8 between one solution with a fixed time-step of $10^{-8} \cdot \tau_\eta$ and another one with a fixed time-step of $10^{-6} \cdot \tau_\eta$. The growth rate (in units of τ_η^{-1}) was estimated with its uncertainty at 95% confidence level.

suggests that the non-modelled magnetic energy can provide a rough measure of the equivalent magnetic perturbation. Note however that the best-fitting trend in this log-log plot reveals that the equivalent magnetic perturbation is intermediate between being proportional to the relative missing magnetic energy and its square root, which probably comes from the role played by the missing small-scale flow and thermal fields in defining the equivalent magnetic perturbation. In this respect Fig. 4.8 should not be over-interpreted. It simply suggests that estimating the relative contribution of the non-modelled magnetic energy is able to provide an order of magnitude of an equivalent magnetic perturbation, which in turn can be used to assess the limit of predictability of a simulation with a given limited spatial resolution.

By analogy with the issue of limited spatial resolution, the impact of limited temporal resolution in numerical simulations can also be assessed. To this end, we still relied on dynamo B4 and produced two solutions with fixed time-steps (contrary to the previous ones produced with an adaptive time-step varying between 1×10^{-6} and $5 \times 10^{-6} \cdot \tau_\eta$): one well-resolved with a time-step of $\Delta t = 10^{-8} \cdot \tau_\eta$, one of lesser resolution computed starting from the previous solution at a given time t_0 but with a time-step of $\Delta t = 10^{-6} \cdot \tau_\eta$ from there on. As illustrated in Fig. 4.9, the rms errors Δy_n between these two solutions after t_0 (computed according to Eq. 4.5) led to an exponential growth, the rate of which was found to be consistent with those previously inferred for dynamo B4. Note that the equivalent magnetic perturbation (i.e. the amplitude at which the rms errors Δy_n begin to grow after the brief mobilisation phase in Fig. 4.9) is now of the order of 10^{-5} for a decrease of two orders of magnitude in the time-step. It thus suggests that the impact of limited temporal resolution is by far less acute than the impact of limited spatial resolution, which appears to be the main source of error associated with the limited resolution of numerical

simulations.

4.4 Scaling laws

4.4.1 Cause of the error growth

We now wish to investigate the cause of the observed error growth. Let us denote $(\mathbf{B}_0, \mathbf{u}_0, T_0, P_0)$ the reference solution and $(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}, \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}, T_0 + T, P_0 + P)$ the perturbed solution after the mobilisation phase. Both solutions are dynamo solutions and thus satisfy the equations governing MHD and Boussinesq convection [e.g. Christensen et Aubert, 2006], that is, for the reference state:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla P_0 + \nu \Delta \mathbf{u}_0 + \alpha T_0 \mathbf{g} - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}_0 \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 ; \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) T_0 = \kappa \Delta T_0 ; \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_0) + \eta \Delta \mathbf{B}_0, \quad (4.10)$$

where ρ_0 is the density of the core and μ_0 the magnetic permeability.

Assuming the perturbations to be small and linearising about the reference state then yields the following three equations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{(i)} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0}_{(ii)} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} + \alpha T \mathbf{g} - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0 + (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}] ; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) T}_{(i)} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla) T_0}_{(iii)} = \kappa \Delta T ; \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \underbrace{\nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B})}_{(i)} + \underbrace{\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)}_{(iv)} + \eta \Delta \mathbf{B}. \quad (4.13)$$

which respectively describe the evolution of the flow, temperature and magnetic perturbations. All those equations display at least one term (labelled (i) in each equation) that can produce some exponential growth of $\mathbf{u}$, T and $\mathbf{B}$. A first-order dimensional analysis of those terms immediately suggests a possible growth rate scaling as $\lambda \propto U_0/D$ (Note that for the purpose of the present discussion, all dynamo output quantities such as U_0 with a 0 index will relate to the unperturbed

dynamo solution, whereas analogous quantities without any index will refer to the perturbation). However those equations also display diffusive terms ($\nu\Delta\mathbf{u}$ in Eq. 4.11, $\kappa\Delta T$ in Eq. 4.12 and $\eta\Delta\mathbf{B}$ in Eq. 4.13), and a number of terms coupling the flow ($\mathbf{u}$), temperature (T) and magnetic ($\mathbf{B}$) perturbations. Some of those terms, labelled (ii), (iii) and (iv) are quite similar in form as the (i)-terms. As noted in section 4.3.2, the mobilisation phase can be seen as as the time required to produce the equilibrium $U/U_0 = T/T_0 = B/B_0$ (presumably via a balance between the buoyancy, Coriolis and Lorentz terms in Eqs. 4.8 and 4.11). In these conditions, the (ii), (iii) and (iv) terms respectively scales as $\frac{U_0 U}{D}$, $\frac{UT_0}{D} = \frac{U}{U_0} \frac{T_0}{T} \frac{U_0 T}{D} = \frac{U_0 T}{D}$, $\frac{UB_0}{D} = \frac{U}{U_0} \frac{B_0}{B} \frac{U_0 B}{D} = \frac{U_0 B}{D}$. In a regime where advection renders the various diffusive terms of secondary importance, we thus obtain that the natural scaling for the error growth rate we observe is $\lambda \propto U_0/D$.

Depending on which timescale one uses, this scaling law can then be written as $\lambda\tau_\eta \propto (U_0 D)/\eta = Rm$ (the magnetic Reynolds number) if using the magnetic diffusion time $\tau_\eta = D^2/\eta$, $\lambda\tau_\kappa \propto (U_0 D)/\kappa = Pe$ (the Péclet number) if using the thermal diffusion time $\tau_\kappa = D^2/\kappa$, $\lambda\tau_\nu \propto (U_0 D)/\nu = Re$ (the Reynolds number) if using the kinematic diffusion time $\tau_\nu = D^2/\nu$, and $\lambda\Omega^{-1} \propto U_0/(\Omega D) = Ro$ (the Rossby number) if using the inverse rotation frequency Ω^{-1} . In principle, if λ indeed only scales like U_0/D , any of the four timescales $\tau = \{\tau_\eta, \tau_\kappa, \tau_\nu, \Omega^{-1}\}$ should lead $\lambda\tau$ to plot as a linear function of the corresponding Rm , Pe , Re or Ro number. Yet, this is not the case. This can be seen in Fig. 4.10, which shows only three such plots, since all our simulations were run with $Pr = 1$, leading to $Pe = Re$ and $\tau_\kappa = \tau_\nu$ so that plotting $\lambda\tau_\kappa$ as a function of Pe would be exactly the same as plotting $\lambda\tau_\nu$ as a function of Re .

Fig. 4.10a which shows $\lambda\tau_\eta$ as a function of Rm , indeed suggests that λ in units of τ_η^{-1} is proportional to Rm . But it also shows that the factor of proportionality is sensitive to the Ekman number E . This sensitivity was attributed by Hulot *et al.* [2010b] to a geometrical effect of the leading scales of the background dynamo flows. Plotting $\lambda\tau_\nu$ as a function of Re provides a complementary perspective (Fig. 4.10b). This figure can be seen as a transform of Fig. 4.10a via the common multiplication of both abscissa and ordinate of each point by the magnetic Prandtl number Pm . As Pm -values in our simulations are roughly related to E -values (recall Tab. 4.1), with larger values of Pm being associated with larger values of E , this leads to a reorganisation of the various segments of Fig. 4.10a into a mainly piecewise succession of segments in Fig. 4.10b. Runs with various Pm values were nevertheless computed for each E , and this also reveals some sensitivity of λ with respect to Pm , as is best seen in Fig. 4.10c, which now shows $\lambda\Omega^{-1}$ as a function of Ro . The advantage of such a plot is that both abscissa and ordinates no longer refer to any of the diffusive parameters η and ν , so that the sensitivity of λ to those parameters (via E and Pm) are directly to be found in the behaviour of the plot itself. This plot shows that $\lambda\Omega^{-1}$ is proportional to Ro , with a slope that depends on E , but also on Pm . This then leads us to conclude that as a general rule, λ is indeed proportional to U_0/D , but with a factor of proportionality that depends on both E and Pm , that is on the two diffusivities η and ν .

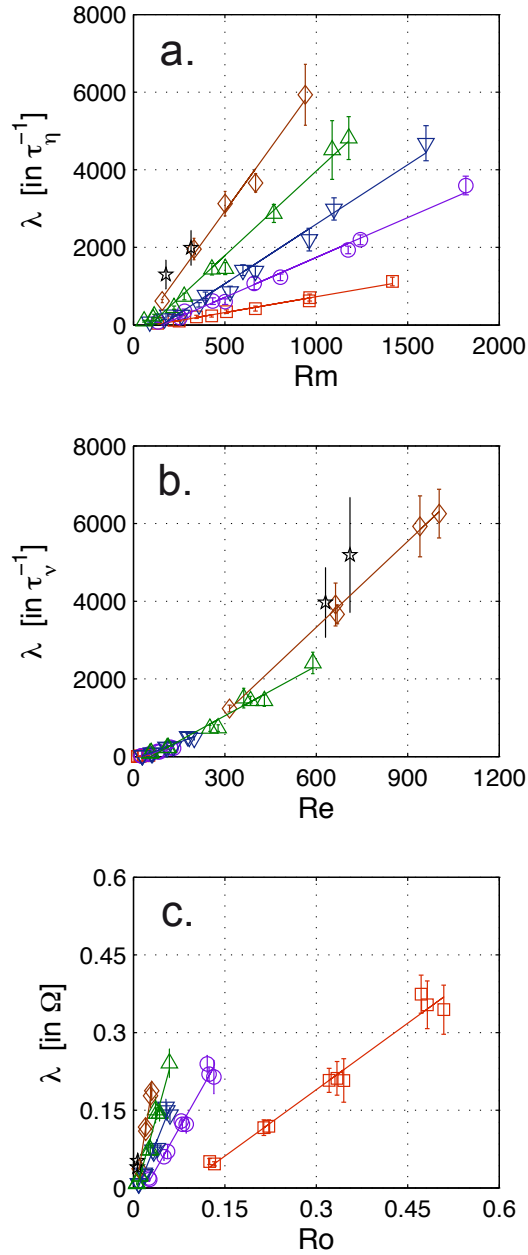


Figure 4.10: Growth rate λ as a function of Rm (a), Re (b) and Ro (c). Note that λ is counted in units of τ_η^{-1} in (a) (which amounts to plotting $\lambda\tau_\eta$), in units of τ_v^{-1} in (b) (which amounts to plotting $\lambda\tau_v$), and in units of Ω in (c) (which amounts to plotting $\lambda\Omega^{-1}$). Colour codes and symbols refer to E , with $E = 1 \times 10^{-2}$ being shown as red squares, $E = 1 \times 10^{-3}$ as purple circles, $E = 3 \times 10^{-4}$ as blue down-pointing triangles, $E = 1 \times 10^{-4}$ as green up-pointing triangles, $E = 3 \times 10^{-5}$ as brown diamonds, and $E = 1 \times 10^{-5}$ as black stars (error bars refer to 95% level of confidence).

4.4.2 Comparing the growth rate to the secular-variation timescale

The sensitivity to E of the factor linking λ to U_0/D was already recognised in Hulot *et al.* [2010b]. This led to the suggestion that scaling λ with respect to some directly observable dynamo output parameter displaying a similar dependence with respect to U_0/D , could perhaps lead to a clearer picture of what exactly governs the growth rate of the errors, particularly in view of inferring an estimate of $\tau_e = \lambda^{-1}$ for the Earth's dynamo. The candidate parameter was the so-called secular-variation timescale τ_{SV} introduced by Christensen et Tilgner [2004] and recently discussed in Lhuillier *et al.* [2011]. This timescale characterises the time variations of each non-dipole spherical harmonic degree n of the (observable) poloidal field at the core surface, through the relationship:

$$\tau_n = \tau_{SV}/n \quad (n \geq 2), \quad (4.14)$$

where τ_n is the reorganisation (or correlation) time introduced by Hulot et Le Mouél [1994] and defined as:

$$\tau_n = \sqrt{\frac{\langle \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] \rangle}{\langle \sum_{m=0}^n [(\dot{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m)^2] \rangle}}, \quad (4.15)$$

where g and h define the Gauss coefficients of the poloidal field at the core surface, $\dot{g}$ and $\dot{h}$ their time derivatives, and the angle brackets refer to time averaging.

In the same way as for λ , it is expected that τ_{SV}^{-1} is proportional to U_0/D . This can be tested using the same three scaling options as was done for λ : plotting $\tau_{SV}^{-1}\tau_\eta$ as a function of Rm (Fig. 4.11a), $\tau_{SV}^{-1}\tau_\nu$ as a function of Re (Fig. 4.11b), and $\tau_{SV}^{-1}\Omega^{-1}$ as a function of Ro (Fig. 4.11c). These plots show that τ_{SV}^{-1} in these dynamo models is close to being proportional to U_0/D , with significantly less dependence on E and Pm (and thus on the two diffusivities η and ν) than λ . This behaviour was already noted by Christensen et Tilgner [2004] who proposed that (their Fig. 3b, where we correct for our different definitions of τ_η and Rm):

$$\tau_{SV}/\tau_\eta = 3.38Rm^{-1}. \quad (4.16)$$

This relationship is indeed compatible with our own results, when considering low enough Ekman numbers (see Fig. 4.11a). Note however that some dependence on E and Pm is still to be found, but mainly for dynamos with high Ekman numbers.

The fact that both λ and τ_{SV}^{-1} are mainly proportional to U_0/D leads us to test the behaviour of $\tau_e = \lambda^{-1}$ rescaled in units of τ_{SV} , which amounts to plotting the non-dimensional quantity τ_e/τ_{SV} as a function of some parameter characterising U_0/D . Again, three options are possible, depending on which timescale we use to measure U_0/D .

We first discuss Fig. 4.12a, which shows τ_e/τ_{SV} as a function of Rm . For any fixed Ekman number E , and when Rm increases, τ_e/τ_{SV} progressively decreases towards some asymptotic value, this asymptotic value being reached more rapidly when the Ekman number becomes smaller. Of the order of 0.05 for the lowest Ekman number, this value provides an upper estimate of τ_e/τ_{SV} for dynamos with lower Ekman number, such as the geodynamo.

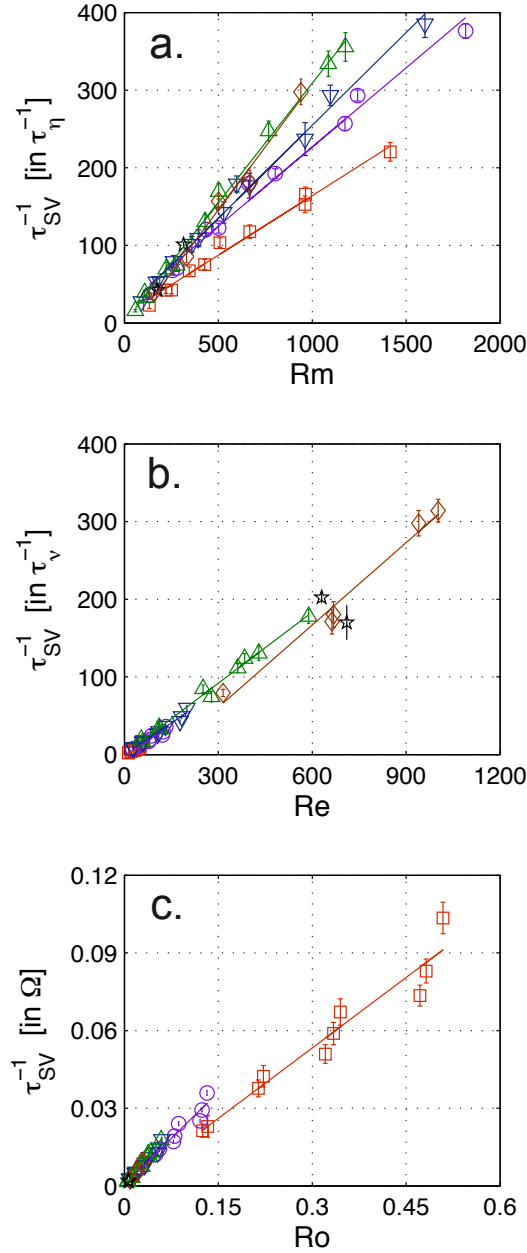


Figure 4.11: Inverse τ_{SV}^{-1} of the secular-variation timescale as a function of Rm (a), Re (b) and Ro (c). Note that τ_{SV}^{-1} is counted in units of τ_η^{-1} in (a) (which amounts to plotting τ_η/τ_{SV}), in units of τ_ν^{-1} in (b) (which amounts to plotting τ_ν/τ_{SV}), and in units of Ω in (c) (which amounts to plotting $(\tau_{SV}\Omega)^{-1}$). Note also that in panel (a), Eq. 4.16 predicts a linear plot ($\tau_\eta/\tau_{SV} = 0.296Rm$, not shown) indistinguishable from the overlapping linear best fits obtained for E between 10^{-5} and 10^{-4} . Colour codes and symbols refer to E as in Fig. 4.10 (error bars refer to 95% level of confidence).

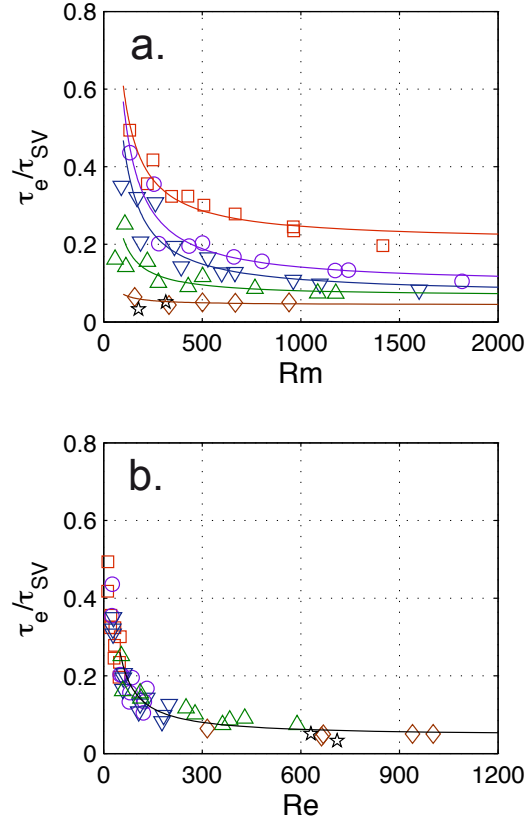


Figure 4.12: Ratio of the e-folding time τ_e to the secular-variation timescale τ_{SV} as a function of the magnetic Reynolds number Rm (a) and Reynolds number Re (b). Simple fits of the form $\tau_e/\tau_{SV} = a + b/Rm$ are presented for each value of the Ekman number E (save for $E = 1 \times 10^{-5}$ in view of the scarcity of the values) in view of the scarcity of the values) in panel (a) and a similar fit of the form $\tau_e/\tau_{SV} = a + b/Re$ (for all the values) is shown in panel (b). This last best fit leads to an asymptotic estimate of 0.05 ± 0.02 for τ_e/τ_{SV} . Colour codes and symbols refer to E as in Fig. 4.10

Interesting additional insight is provided by Fig. 4.12b, which shows τ_e/τ_{SV} as a function of Re . This figure reveals a more striking trend for all dynamos we investigated to have τ_e/τ_{SV} converging towards a common value 0.05 ± 0.02 when Re increases. Since only modest variability was considered for Pm for each value of the Ekman number, plotting τ_e/τ_{SV} as a function of Re in place of Rm essentially amounts to rescaling each curve of Fig. 4.12a according to Pm , in order to produce the single curve in Fig. 4.12b. It can then be interpreted as an indication that all curves with fixed Ekman numbers in Fig. 4.12a tend to eventually converge towards the common value of 0.05 ± 0.02 when Rm becomes large enough.

Our results thus suggest that the two diffusivities η and ν are important parameters, and that the asymptotic value of 0.05 ± 0.02 we found for τ_e/τ_{SV} is only reached provided that E is small enough, while both Rm and Re are large enough.

4.4.3 Comparing the growth rate to the dissipation times

The previous analysis raises the intriguing question of the origin of the asymptotic value we found for τ_e/τ_{SV} . This value is significantly different from order 1, and one may wonder why such a small ratio is obtained. Interestingly, a comparable ratio is found between the magnetic dissipation time τ_{diss}^{mag} introduced by Christensen et Tilgner [2004] and τ_{SV} , possibly suggesting a more fundamental link between τ_e and τ_{diss}^{mag} than between τ_e and τ_{SV} .

This magnetic dissipation time is defined as the ratio $\tau_{diss}^{mag} = E_{mag}/D_{Ohm}$ of the total magnetic energy of the dynamo

$$E_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \int B_0^2 dV \quad (4.17)$$

to the total Ohmic dissipation power

$$D_{Ohm} = \frac{\eta}{\mu_0} \int (\nabla \times B_0)^2 dV \quad (4.18)$$

where the integrals are computed over the volume of the dynamo shell. Just like τ_{SV} , τ_{diss}^{mag} can be expected to scale like Rm^{-1} when measured in units of τ_η . To see this, it is important to first recognise that since the dynamo is in a saturated regime, Eq. 4.10 implies that on average D_{Ohm} also satisfies:

$$D_{Ohm} = \frac{1}{2\mu_0} \int B_0 \cdot \nabla \times (u_0 \times B_0) dV. \quad (4.19)$$

It is then quite natural to expect D_{Ohm} to scale as $B_0^2 U_0 V / (\mu_0 D)$, where V is the volume of the dynamo shell. Likewise, it is natural to expect E_{mag} (as given by Eq. 4.17) to scale as $B_0^2 V / \mu_0$. This then leads to the suggestion that $\tau_{diss}^{mag} = E_{mag}/D_{Ohm}$ scales like $D/U_0 = \tau_\eta Rm^{-1}$. Christensen et Tilgner [2004] already found that τ_{diss}^{mag} is essentially proportional to Rm^{-1} when counted in units of τ_η (for dynamo simulations with E ranging from 1×10^{-5} to 3×10^{-4} , when using our definition of E , see their Fig. 1a). This led them to propose that $\tau_{diss}^{mag}/\tau_\eta = 0.27 Rm^{-1}$ (their Eq. 3, which we modify for our definitions of τ_η and Rm). Such a relationship implies that $(\tau_{diss}^{mag})^{-1}$

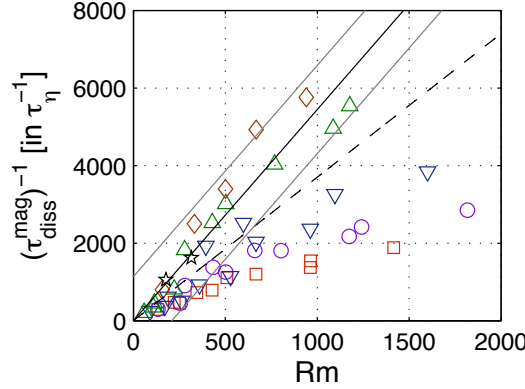


Figure 4.13: $(\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}})^{-1}$ counted in units of τ_{η}^{-1} (which amounts to plotting $\tau_{\eta}/\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$) as a function of Rm . Also shown, the scaling suggested by Christensen et Tilgner [2004] (dashed line), and our best fit to values corresponding to E between 1×10^{-5} and 1×10^{-4} , leading to Eq. 4.20 (solid line, with light lines referring to 95% level of confidence). Colour codes and symbols refer to E as in Fig. 4.10.

plots as a linear function of Rm when scaled in units of τ_{η}^{-1} . Fig. 4.13 shows that this is indeed the case for the simulations we ran. But as was already observed for both λ (Fig. 4.10a) and τ_{SV}^{-1} (Fig. 4.11a), some dependence on E is also to be found for the slope. Interestingly, just like for τ_{SV}^{-1} , this dependence weakens as E decreases. Searching for a best linear fit for the simulations with the smallest Ekman numbers we ran (between $E = 1 \times 10^{-5}$ and $E = 1 \times 10^{-4}$) then leads to

$$\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}/\tau_{\eta} = 0.18(\pm 0.02)Rm^{-1}. \quad (4.20)$$

Combined together, Eq. 4.20 and 4.16 lead to a ratio $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}/\tau_{\text{SV}}$ of the order of 0.05, identical to the asymptotic value we found for $\tau_{\text{e}}/\tau_{\text{SV}}$. These considerations prompted us to directly investigate the behaviour of $\tau_{\text{e}}/\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ as a function of Re , for comparison with Fig. 4.12b. As can be seen in Fig. 4.14a, it now appears that $\tau_{\text{e}}/\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ converges towards unity as both E decreases and Re increases. This then suggests that for dynamos with low E and high Re and Rm , τ_{e} is governed by the magnetic dissipation time $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$. Since $(\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}})^{-1}$ reflects the rate at which magnetic energy is both lost and supplied in the dynamo (since the field is permanently maintained), this then leads us to suggest that for low enough E and high enough Re and Rm , what ultimately governs the growth rate $\lambda = \tau_{\text{e}}^{-1}$ is the rate with which magnetic energy can be provided by the system to feed the error growth.

At this point however, it is important to recall that the error growth not only affects the magnetic field but also the other fields, and that the rate at which kinetic energy is provided to compensate for viscous dissipation could therefore also play a role. This rate can be measured via an analogous viscous dissipation time defined as the ratio $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}} = E_{\text{kin}}/D_{\text{vis}}$ of the total kinetic

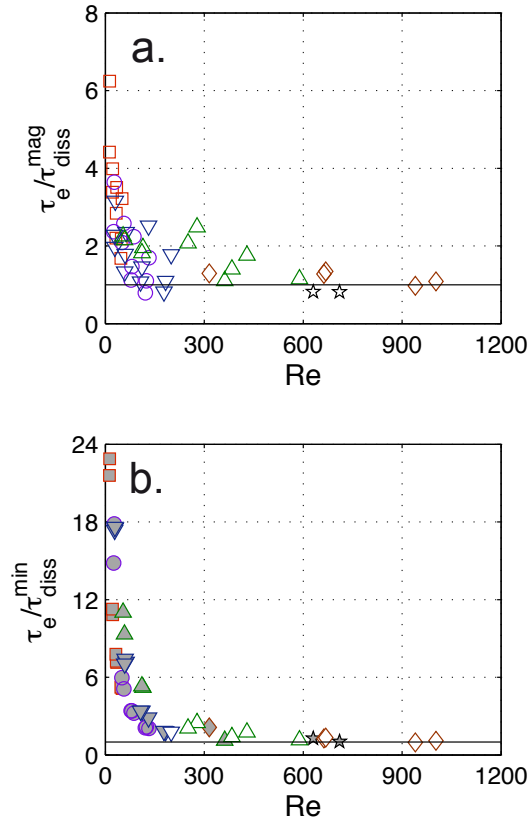


Figure 4.14: Ratio of the e-folding time τ_e to the magnetic dissipation time $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ (a) and to the minimum $\min(\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}}, \tau_{\text{diss}}^{\text{mag}})$ of the viscous and magnetic dissipation times (b) as a function of Re . Colour codes and symbols refer to E as in Fig. 4.10. In panel (b), grey-filled symbols indicate values obtained when $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}} < \tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$.

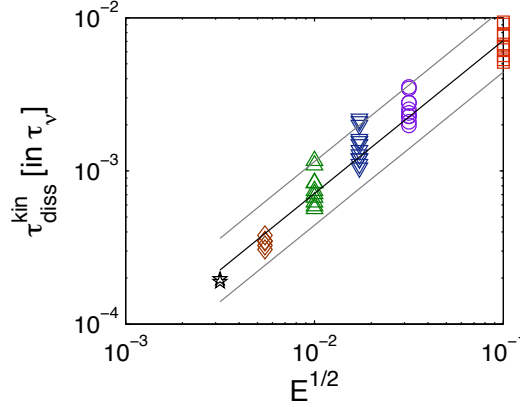


Figure 4.15: τ_{diss}^{kin} counted in units of τ_v (which amounts to plotting τ_{diss}^{kin}/τ_v) as a function of $E^{1/2}$. Also shown our best fit leading to Eq. 4.23 (solid line, with light lines referring to 95% level of confidence). Colour codes and symbols refer to E as in Fig. 4.10.

energy of the dynamo

$$E_{kin} = \frac{\rho_0}{2} \int u_0^2 dV \quad (4.21)$$

to the total viscous dissipation power

$$D_{vis} = \rho_0 \nu \int (\nabla \times \mathbf{u}_0)^2 dV \quad (4.22)$$

where the integrals are computed over the dynamo shell.

Interestingly, this second dissipation time τ_{diss}^{kin} scales very differently. Although the formal analogy of Eq. 4.17 and 4.21 on the one hand, and 4.18 and 4.22 on the other hand, would suggest that τ_{diss}^{mag} is simply related to τ_{diss}^{kin} via a factor $Pm = \nu/\eta$, this turns out not to be the case. The reason for this is that the detailed way the dissipation occurs is very different for D_{Ohm} and D_{vis} . To properly scale D_{vis} , we must recognise that most of the viscous dissipation occurs within the Ekman boundary layer, of thickness δ scaling as $(\nu/\Omega)^{1/2}$. This then leads D_{vis} (as given by 4.22) to scale as $\rho_0 \nu U_0^2 S / \delta$, where S is the outer surface of the shell, while E_{kin} (as given by 4.21) scales as $\rho_0 U_0^2 V$. This in turn implies that $\tau_{diss}^{kin} = E_{kin}/D_{vis}$ scales as $D\delta/\nu = D/(\nu\Omega) = \Omega^{-1} E^{-1/2} = \tau_v E^{1/2}$. As can be seen in Fig. 4.15, τ_{diss}^{kin} essentially scales as $E^{1/2}$ when measured in units of τ_v for all the dynamos we considered, with a best fit leading to:

$$\tau_{diss}^{kin}/\tau_v = 0.071(\pm 0.004)E^{1/2}. \quad (4.23)$$

This equation, together with Eq. 4.20, then makes it possible to identify which of τ_{diss}^{kin} and τ_{diss}^{mag} is the shortest for a given dynamo. These equations can indeed be combined so that the ratio $\tau_{diss}^{kin}/\tau_{diss}^{mag}$ can directly be expressed as:

$$\tau_{diss}^{kin}/\tau_{diss}^{mag} = 0.39(\pm 0.07)ReE^{1/2}. \quad (4.24)$$

This being established, we now note that all our simulations with low Re (less than typically 200) happen to display a $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}}$ smaller than $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ (as can be seen in Fig. 4.14b, where we plot $\tau_e / \min(\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}}, \tau_{\text{diss}}^{\text{mag}})$ as a function of Re). This suggests that viscosity could also play a significant role in controlling the rate of error growth for these dynamos. However, for most of our simulations with high Re (above typically 200), $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}}$ was found to be larger than $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$, and this suggests that for these dynamos, viscous dissipation plays a minor role compared to magnetic dissipation. This is consistent with the fact that τ_e asymptotically equates to $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ for those high Re simulations. Nevertheless, we note that in the few instances when $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}}$ was found to be (then slightly) smaller than $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ for such high Re , τ_e happens to be closer to $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}}$ than to $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ (see Fig. 4.14b).

From these results, we suggest that for low enough E and high enough Re and Rm , provided that $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}}$ is larger than $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ (as can be assessed thanks to Eq. 4.24), what governs the error growth in a dynamo, is the rate $(\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}})^{-1}$ with which magnetic energy can be provided to feed the growth of the errors.

4.5 Summary of results

In this study we investigated, both from a numerical and a theoretical point of view, the growth of errors initially introduced in numerical dynamo simulations. As was shown in section 4.3, one of the most remarkable properties of this error growth is its universal and robust character. Irrespective of the type, the amplitude and the time of the perturbation introduced, it always resulted in an exponential error growth. Furthermore, for any fixed dynamo regime defined by a set of non-dimensional parameters Ra^* , E , Pr and Pm , this rate was always found to be the same, to within little variability. The largest cause of variability was found to be related to the time of the perturbation introduced, causing an approximately normal distribution of the recovered rates, with a standard deviation of the order of 6% of the mean rate. When considering random perturbations introduced at a given fixed time, this standard deviation was found to be lower, of the order of 3%. The only exception to this general rule was found when the amplitude of the perturbation introduced was very large (typically greater than 10^{-2}), in which case the growth rate was found to slightly slows. Similar slowing was observed by meteorologists when they carried out similar analysis of the atmospheric system [see e.g. Smagorinsky, 1969]. But it is worth noting that, in contrast to what we observed for dynamos, these meteorological studies reveal much more sensitivity of the error growth to the details of the instantaneous atmospheric state (see e.g. Charney *et al.* [1966] and Kalnay [2002] for more recent illustrations).

Thanks to its universal and robust character, the growth rate was estimated for a large set of control parameters, and scaling laws were sought to investigate the cause of the error growth. Based on an analysis of Eq. 4.8-4.10 governing the reference solution and of Eq. 4.11-4.13 governing the perturbation, we argued that the growth rate λ was mainly proportional to U_0/D (section 4.4.1), as had originally been proposed in Hulot *et al.* [2010b]. We also observed (Fig. 4.10) that the factor of proportionality linking λ to U_0/D depended on E and Pm (Pr being

anyway set to 1 in all our simulations). But rather than making an attempt to scale λ also with respect to E and Pm , we investigated the possibility of directly scaling the e-folding time $\tau_e = \lambda^{-1}$ of the error growth with respect to other relevant dynamo output timescales. Three such timescales were identified, the secular-variation timescale τ_{SV} defined by Eq. 4.14-4.15, the magnetic dissipation time τ_{diss}^{mag} defined by Eq. 4.17-4.18, and the kinetic dissipation time τ_{diss}^{kin} defined by Eq. 4.21-4.22.

Scaling τ_e with respect to τ_{SV} , we found that some asymptotic value of 0.05 ± 0.02 was eventually reached for τ_e/τ_{SV} , provided that E was small enough, while both Rm and Re were large enough (section 4.4.2). Scaling τ_e with respect to τ_{diss}^{mag} led to further insight. We showed that $(\tau_{diss}^{mag})^{-1}$ was also primarily proportional to U_0/D (section 4.4.3). Guided by Christensen et Tilgner [2004] who had investigated the behaviour of both $\tau_{diss}^{mag}/\tau_\eta$ and τ_{SV}/τ_η as a function of Rm , we noted that a value of 0.05 was found for the ratio $\tau_{diss}^{mag}/\tau_{SV}$, when E was small enough. The coincidence between the value of 0.05 found for $\tau_{diss}^{mag}/\tau_{SV}$, and the asymptotic value of 0.05 ± 0.2 previously found for τ_e/τ_{SV} , was a clear incentive to more closely investigate the behaviour of τ_e/τ_{diss}^{mag} . Plotting τ_e/τ_{diss}^{mag} as a function of Re revealed that this ratio tended to reach an asymptotic value of unity when Re became large enough (Fig. 4.14a). This was interpreted as the fact that the growth rate of the errors could be controlled by the rate with which magnetic energy could be provided by the flow to feed the error growth. But we also noted that kinetic energy, just like magnetic energy, could also contribute. The rate at which kinetic energy could be provided being characterised by τ_{diss}^{kin} , we also investigated the behaviour of this quantity, which scales very differently from τ_{diss}^{mag} (Eq. 4.23). We noted that for most of our simulations with low Re , this timescale was shorter than τ_{diss}^{mag} , implying a significant role of viscosity in controlling the growth rate for such dynamos. But we also noted that most of our simulations with high Re had τ_{diss}^{kin} larger than τ_{diss}^{mag} , confirming the leading role of this timescale in controlling the error growth for these dynamos.

Taken together, our results suggest that τ_e is controlled by τ_{diss}^{mag} as soon as dynamos with low enough E , and large enough Re and Rm are considered, and provided that $\tau_{diss}^{kin}/\tau_{diss}^{mag}$ is large enough (as can be assessed with the help of Eq. 4.24). As we shall see next, the geodynamo is one such dynamo. We therefore propose that the growth rate of the errors for the geodynamo could be identical to its τ_{diss}^{mag} magnetic dissipation time.

4.6 Implications for the limit of predictability of the Earth's dynamo

Hulot *et al.* [2010b] noted that τ_e/τ_{SV} tended to converge towards a value of 0.05 as soon as E was small enough and Rm large enough. This result was then used to infer an empirical value $\tau_e \approx 30$ yr for the geodynamo, assuming $\tau_{SV} = 535$ yr, as proposed by Christensen et Tilgner [2004]. The authors were however unaware of what could be responsible for the asymptotic value $\tau_e/\tau_{SV} = 0.05$, and it is important that we now reconsider these earlier results in view of

the present more extensive study.

Taking $D \approx 2260$ km and $\eta = 1.32 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, we first estimate $\tau_\eta \approx 120$ kyr for the Earth's core. We next assume $\tau_{\text{SV}} = 535$ yr for the Earth's magnetic field [Christensen et Tilgner, 2004] and rely on Eq. 4.16 to estimate $Rm \approx 760$. Since $Re = Rm/Pm$, this then implies that Re is at least of the order of 7×10^7 (assuming a standard value of $Pm = 10^{-5}$). Further noting that for the Earth's core the Ekman number locates in the range $E = 10^{-15} - 10^{-14}$ [Christensen et Wicht, 2007], this shows that the geodynamo is well in the regime we identified in the present study, such that τ_e would equate to $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$, provided that $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ is smaller than $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}}$.

To assess whether this last condition is met for the geodynamo, we use $Rm \approx 760$ and rely on Eq. 4.20 to estimate $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}} \approx 30$ yr. Taking $E = 10^{-15} - 10^{-14}$, we next rely on Eq. 4.23 — which we slightly recast into the equivalent formulation $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}} = 0.07\Omega^{-1}E^{-1/2}$ — to infer $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}} = 310 - 980$ yr. Comparing these estimates of $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ and $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}}$ shows that $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ is indeed smaller than $\tau_{\text{diss}}^{\text{kin}}$ for the geodynamo, by at least one order of magnitude. We thus propose that τ_e is governed by $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ to which it can be identified. This in turn leads us to estimate $\tau_e \approx 30$ yr, leading to an error doubling time of $\ln(2) \cdot \tau_e \approx 21$ yr.

It is not fortuitous that the same value $\tau_e \approx 30$ yr is reached here as in Hulot *et al.* [2010b]. It simply reflects the fact that the empirical result $\tau_e/\tau_{\text{SV}} = 0.05$ is a direct consequence of both τ_{SV} and $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$ scaling as Rm when counted in units of τ_η to within precisely that factor (recall Eq. 4.16 and 4.20). In contrast, our estimate of τ_e is now directly based on our contention that τ_e is governed by $\tau_{\text{diss}}^{\text{mag}}$.

Now what about the practical limit of predictability of the geodynamo? Inferring this limit not only requires an estimate of τ_e . It also requires some knowledge of how well the dynamical state of the geodynamo is known at some initial time. If this initial imperfect knowledge can be cast in the form of some relative error of amplitude ε in any of the magnetic, flow or temperature field, our results of section 4.3 show that this error would be quickly communicated to all other dynamo fields and next grow exponentially with the rate defined by τ_e , so that the effective limit of predictability would be of the order of $\Delta t = \ln(\varepsilon^{-1}) \cdot \tau_e$.

In practice, the situation is however more complex. Despite recent progress in satellite measurements [see e.g. Gillet *et al.*, 2010b], only the largest scales of the radial field at the core surface can directly be recovered [see e.g. Hulot *et al.*, 2007] since the smallest scales are concealed by the lithospheric field [see e.g. Hulot *et al.*, 2009]. This limitation is however mitigated by the fact that the field at the core surface can be reconstructed far back in time [see e.g. Hulot *et al.*, 2010a]. Historical models [see e.g. Jackson *et al.*, 2000] and archaeomagnetic models [see e.g. Korte et Constable, 2005] provide useful information over centennial and millennial timescales, and could be used in the context of data assimilation to produce an estimate of the current dynamical state of the geodynamo [see e.g. Fournier *et al.*, 2010].

Were dynamo simulations employed to produce forecasts of the magnetic field, the practical limit of predictability would be defined by both the value $\tau_e \approx 30$ yr and all the combined sources of errors with which the initial state of the geodynamo could be approximated, but also by further errors introduced by the necessarily limited resolution of the numerical model. We saw in section

4.3.3 that the impact of such a limited resolution was quite comparable to that of an additional initial relative error of ε' , the main cause of this error being due to spatial rather than temporal resolution. We suggested a simple way of assessing the magnitude of this equivalent initial error, which can be kept reasonably low if enough numerical resolution is achieved, but we saw can hardly be less than $\varepsilon' = 10^{-3}$.

Finally, it is important to recall that all numerical models are unfortunately forced to run in parameter regimes that are still very far from that of the true geodynamo, so that none can yet claim to be completely appropriate. Although progress in computational resources will certainly help improve on this situation, and our study or that of Christensen *et al.* [2010] could be used to assist in the best choice of workable parameters, this will inevitably result in some additional unknown error, and further reduce the practical limit of predictability. Unfortunately and despite some interesting suggestions [see Liu *et al.*, 2007], there is no simple way of anticipating how severe the effect of this unknown error could be.

Hulot *et al.* [2010b] previously noted that satellite data currently make it possible to build field models that correctly describe the core field at the Earth's surface to within 10–20 nT (which is mainly the effect of ignoring the unknown small scales of this core field), and that simple linear temporal extrapolation of this field usually leads to an error roughly ten times larger after 5 years [see e.g. Maus *et al.*, 2008]. Estimating $\tau_e \approx 30$ yr, they concluded that, in the best of all worlds and with the help of an optimised data-assimilation scheme, a similar increase in error might be achieved after roughly $\ln(10) \cdot \tau_e = 70$ yr. This estimate ignored that very little is known about the dynamical state of the geodynamo beyond the observable field it produces, and it only took the impact of ignoring the small scales of the observed field into account in a very optimistic way. Assessing the true limit of predictability of data-assimilation schemes will clearly require much more work, and will probably have to wait for the advent of the first operational such codes. Nevertheless, it is clear that the value of 30 yr we estimate for τ_e , is a very serious challenge in view of the many sources of errors that can grow exponentially at that pace.

Chapitre 5

Variabilité à long terme du champ magnétique terrestre

L'augmentation des capacités de calcul associée à une meilleure connaissance de l'espace des paramètres permettent aujourd'hui d'envisager l'utilisation de modèles numériques de la géodynamo dans une perspective de comparaison avec des données paléomagnétiques. Utilisant le temps caractéristique de la variation séculaire pour une remise à l'échelle du temps soucieuse de respecter la dynamique des spectres spatiaux en puissance du champ magnétique terrestre, nous travaillons sur trois simulations numériques dont l'intégration temporelle a été effectuée sur l'équivalent de 30 à 50 millions d'années. Ces simulations numériques, dont la fréquence moyenne des inversions est en bon accord avec celle de la géodynamo, permettent de sonder l'effet d'inclure des chrons de courte durée sur la distribution de la durée des chrons. Nous observons que l'inclusion de ces chrons de courte durée rapproche généralement le processus d'inversion d'un processus poissonien, c'est-à-dire dénué de mémoire à long terme des événements antérieurs. Pour des intervalles de polarité inférieurs à 100 000 ans, nous observons par ailleurs une corrélation nette entre l'intensité moyenne et la durée de ces intervalles. Cette corrélation s'estompe cependant pour des durées d'intervalles supérieures à cette borne.

5.1 Introduction

5.1.1 Observations paléomagnétiques du champ

Lorsqu'on s'intéresse au champ magnétique terrestre passé, on ne dispose plus de données aussi directes que pour le champ présent. Les données paléomagnétiques se présentent sous la forme d'enregistrements locaux (par des roches volcaniques ou sédimentaires présentant des propriétés d'aimantation) de la direction et/ou de l'intensité du paléochamp en un endroit donné à la surface de la Terre. A partir de ces informations locales, on cherche ensuite à inférer des informations

globales sur le paléochamp. Il s'agit somme toute de la même démarche que pour le champ actuel, avec cependant des difficultés supplémentaires liées à la couverture spatio-temporelle plus éparse des données, à la datation parfois difficile des échantillons et aux possibles effets de filtrage.

Dans le cadre du formalisme statistique du « Giant Gaussian Process » [Constable et Parker, 1988], on peut chercher au moyen d'un problème inverse à retrouver la valeur moyenne ainsi que la variance des premiers coefficients de Gauss du paléochamp [Khokhlov *et al.*, 2001, 2006]. Cette méthode fonctionnent relativement bien pour les cinq derniers millions d'années, et a mis en évidence l'existence d'un g_2^0 de l'ordre de 2 à 4% du g_1^0 , et éventuellement d'un g_3^0 [voir p.ex. Johnson et McFadden, 2007, pour un article de synthèse]. Cette méthode n'est cependant pas applicable pour des temps plus anciens. Pour interpréter les données paléomagnétiques, on se place plus généralement dans le cadre de l'hypothèse du dipôle axial centré, ce qui permet de définir les concepts de pôle géomagnétique virtuel (i.e. le pôle d'un champ exclusivement dipolaire qui produirait les valeurs d'inclinaison et de déclinaison de l'observation) et de moment dipolaire virtuel (i.e. le moment d'un champ exclusivement dipolaire qui produirait les valeurs d'intensité et d'inclinaison de l'observation). En étudiant la dispersion des pôles géomagnétiques virtuels (c'est-à-dire les écarts par rapport à l'hypothèse du dipôle axial centré), on peut obtenir des informations indirectes sur la variation séculaire et sonder ainsi la présence de composantes n'appartenant pas au dipôle axial [voir p.ex. Hulot *et al.*, 2010a, pour un article de synthèse]

Armés de ces concepts, il est possible de s'intéresser à une large variété d'aspects du champ magnétique terrestre passé, tels que le déroulement des inversions [voir p.ex. Glatzmaier et Coe, 2007, Amit *et al.*, 2010] et des excursions [voir p.ex. Laj et Channell, 2007], la fréquence des inversions [voir p.ex. Lowrie et Kent, 2004], ou encore les tendances de l'évolution à long terme de la géodynamo [voir p.ex. Aubert *et al.*, 2010]. Dans ce chapitre, nous choisissons de nous focaliser plus particulièrement sur la durée des chrons et la fréquence des inversions.

5.1.2 Analyse de la durée des chrons

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, l'échelle des polarités magnétiques reconstituée à partir des anomalies magnétiques du plancher océanique fournit des informations précieuses sur la fréquence des inversions durant les derniers 160 millions d'années [voir p.ex. Lowrie et Kent, 2004, Gee et Kent, 2007]. L'interprétation de cette échelle n'est cependant pas univoque. Comme cela est illustré à la figure 5.1a, une estimation par fenêtres glissantes [d'après la méthode proposée par McFadden, 1984] de la fréquence des inversions basée sur une version précédente de l'échelle des polarités magnétiques indique que la fréquence des inversions décroît graduellement jusqu'à l'occurrence du superchron de polarité normale du Crétacé pour ensuite augmenter progressivement après le superchron. Cette observation a conduit McFadden et Merrill [1984, 2000] à attribuer cette évolution graduelle à une variation lente des conditions imposées par le manteau sur le noyau. Une interprétation alternative est cependant possible. Comme cela est illustré à la figure 5.1b, un réexamen récent de la fréquence des inversions durant la période antérieure au superchron de polarité normale du Crétacé indique que cette fréquence pourrait être

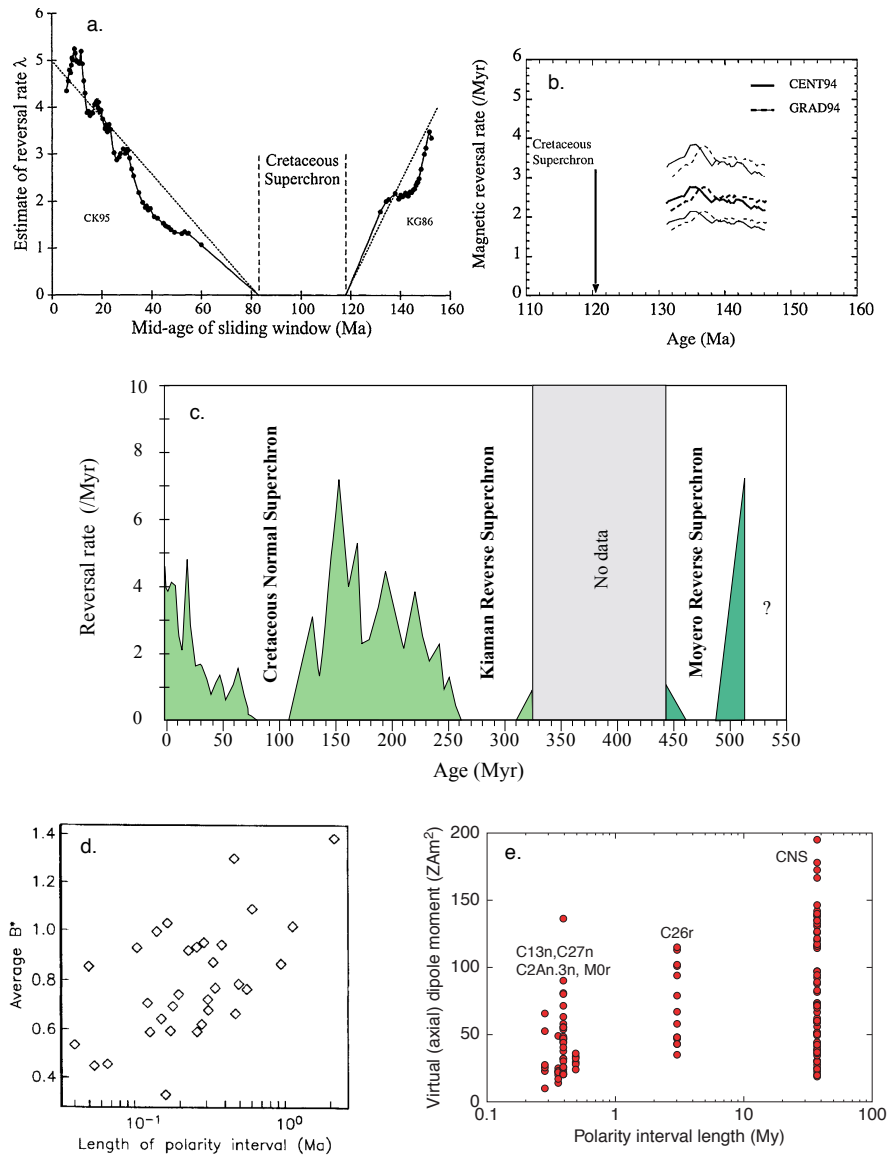


FIGURE 5.1 – Informations paléomagnétiques sur la durée des chrons durant les 500 derniers millions d’années : (a) évolution graduelle de la fréquence des inversions durant les 160 derniers millions d’années (d’après la figure de McFadden et Merrill [2000] basé sur les échelles des polarités magnétiques de Kent et Gradstein [1986] et Cande et Kent [1995]) ; (b) révision de la fréquence des inversions durant la période entre 130 et 150 millions d’années (d’après la figure de Hulot et Gallet [2003] basé sur les échelles des polarités magnétiques de Gradstein *et al.* [1994] et Channell *et al.* [1995]) ; (c) fréquence des inversions durant les 500 derniers millions d’années (d’après Pavlov et Gallet [2005]) ; (d) suggestion d’une corrélation entre l’intensité moyenne et la durée des chrons pour des intervalles inférieurs au million d’années (d’après Tauxe et Hartl [1997]) ; (e) suggestion d’une corrélation entre l’intensité moyenne et la durée des chrons pour des intervalles allant jusqu’au superchron (d’après Tauxe et Yamazaki [2007]).

constante. L'occurrence des trois superchrons représentés à la figure 5.1c serait alors le résultat d'une transition soudaine, attribuable soit à un changement brusque des conditions aux limites à la frontière noyau-manteau [voir p.ex. Gallet et Hulot, 1997, Courtillot et Olson, 2007], soit à une transition non-linéaire spontanée de la géodynamo entre un état d'inversions et un état stable [voir p.ex. Hulot et Gallet, 2003].

Grâce à l'étude de l'échelle des polarités magnétiques des derniers 160 millions d'années, il est possible de procéder à une caractérisation statistique de la durée des chrons, ce qui fournit indirectement des informations sur le processus d'inversions. La première manière de prendre en compte le hasard apparent dans la durée des chrons consiste à considérer un processus de Poisson [Cox, 1968, 1969], selon lequel la probabilité d'observer un chron de longueur comprise entre x et $x + dx$ vaut $p(x) \cdot dx$ où

$$p(x) = \frac{1}{\mu^*} \exp\left(-\frac{x}{\mu^*}\right), \quad (5.1)$$

où μ^* est la durée moyenne des chrons¹. Dans le cas de ce processus, la géodynamo n'a pas mémoire de l'événement précédent, et la probabilité qu'une inversion survienne ne dépend donc pas du laps de temps écoulé depuis la dernière inversion [voir p.ex. Merrill *et al.*, 1996, §5.3]. Une manière plus générale d'expliquer la distribution de la durée des chrons consiste à considérer un processus gamma [Naidu, 1971, Phillips, 1977], selon lequel la probabilité d'observer un chron de longueur comprise entre x et $x + dx$ vaut $p(x) \cdot dx$ où

$$p(x) = \left(\frac{k}{\mu}\right)^k \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)} \exp\left(-k\frac{x}{\mu}\right), \quad (5.2)$$

où $\Gamma(k)$ est la fonction gamma d'indice réel k , et μ la durée moyenne des chrons². Le processus de Poisson est en fait un cas particulier du processus gamma lorsque $k = 1$. Lorsque $k \neq 1$, le processus gamma a une mémoire de l'événement précédent [voir p.ex. Merrill *et al.*, 1996, §5.3]. Une valeur $k > 1$ inhibe la probabilité de s'inverser juste après une précédente inversion, alors qu'une valeur $k < 1$ encouragerait la géodynamo à s'inverser de nouveau lorsqu'elle vient juste de s'inverser. Comme cela est illustré à la figure 5.2, l'analyse de Lowrie et Kent [2004] sur les 160 derniers millions d'années (qui s'appuie sur les données de Cande et Kent [1995] et Channell *et al.* [1995]) indique des valeurs de l'indice k généralement situées entre 1 et 2, avec le sentiment que cette valeur n'est pas significativement différente de 1. La valeur exacte de ce paramètre est cependant limitée par la connaissance imparfaite que nous avons des cryptochrons (i.e. les chrons d'une durée inférieur à 30 000 ans) dans l'échelle des polarités géomagnétiques, en rapport avec la question de la réalité physique des anomalies magnétiques du plancher océanique de courte longueur d'onde (les dénommées « tiny wiggles ») [voir p.ex. Bouligand *et al.*, 2006].

Comme cela est illustré à la figure 5.1d, les travaux de Tauxe et Hartl [1997] et Constable *et al.* [1998] sur des carottes sédimentaires pélagiques fournissant un enregistrement précis du champ entre 23 et 34 millions d'années ont suggéré l'existence d'une corrélation entre la durée des

¹La variance de la durée des chrons vaut dans ce cas μ^{*2} .

²La variance de la durée des chrons vaut dans ce cas μ^{*2}/k .

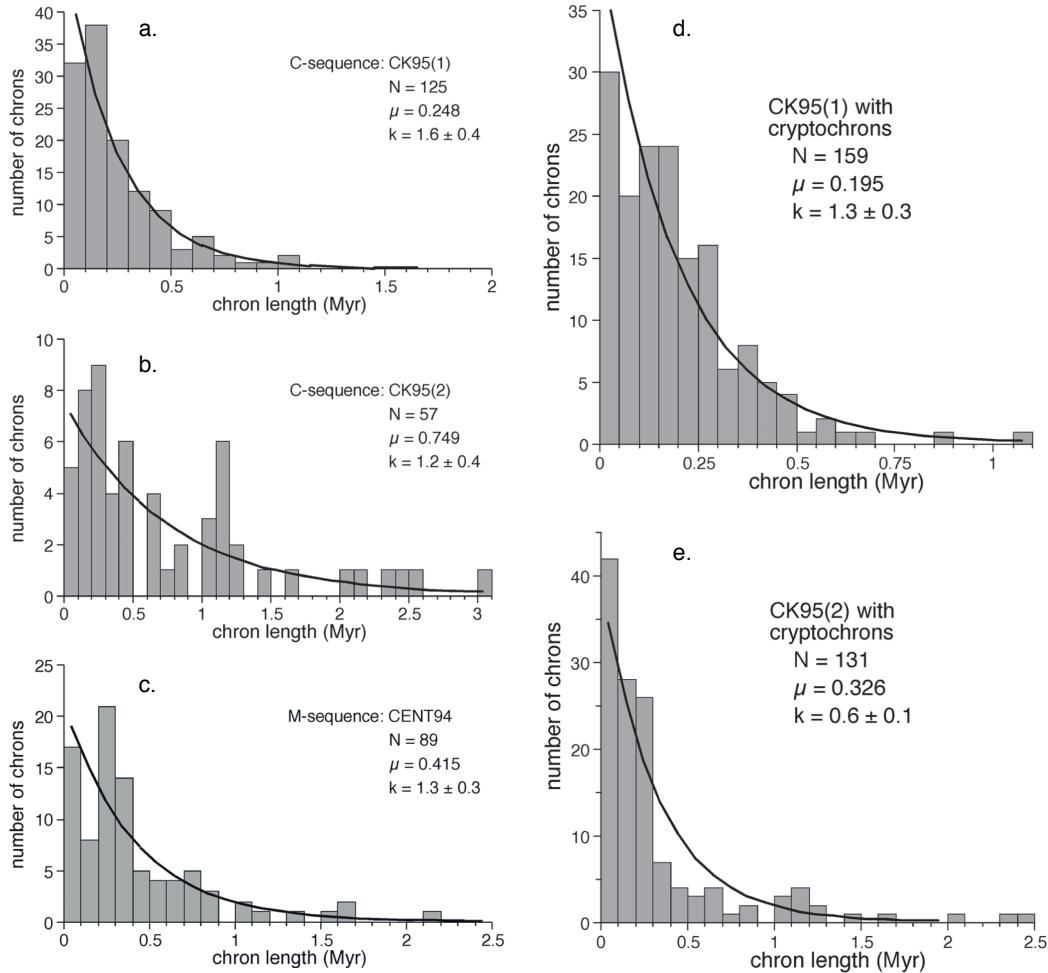


FIGURE 5.2 – Analyse statistique du processus d'inversions d'après Lowrie et Kent [2004]. Pour chacun des segments stationnaires étudiés (se référer à la figure 1.2 : CK95(1) de 0 à 31 Ma ; CK95(2) de 31 à 74 Ma ; CENT94 de 121 à 160 Ma), la grandeur N correspond au nombre de chrons, alors que les grandeurs μ et k (avec son intervalle de confiance à 95%) correspondent aux paramètres de la distribution gamma. Les panneaux a-c représentent la distribution de la durée des chrons en excluant les cryptochrons, alors que les panneaux d et e représentent ces mêmes distributions en incluant les cryptochrons connus.

chrons et l'intensité moyenne du champ. L'étude de Valet *et al.* [2005] basé sur une compilation d'enregistrements sédimentaires pélagiques pour les deux derniers millions d'années va dans ce sens en suggérant un nombre plus soutenu d'inversions et d'excursions lorsque l'intensité moyenne du champ est affaiblie. Comme cela est illustré à la figure 5.1e, l'existence de cette corrélation a également été formulée pour des durées de chrons allant jusqu'au superchron [Tauxe et Yamazaki, 2007] mais est probablement encore sujette à débat.

5.1.3 Approche numérique

Depuis l'avènement des premières simulations numériques modélisant le problème complet de la géodynamo [Glatzmaier et Roberts, 1995a,b, Kageyama *et al.*, 1995], celles-ci ont montré leur capacité à reproduire avec succès certains traits caractéristiques du champ magnétique terrestre, et notamment à produire des renversements de polarité. Par une exploration approfondie de l'espace des paramètres [Christensen *et al.*, 1999, Kutzner et Christensen, 2002, Olson et Christensen, 2006, Christensen et Aubert, 2006, Aubert *et al.*, 2009], les conditions favorables pour l'émergence d'inversions dans les simulations ont pu être identifiées. D'autres études se sont par ailleurs focalisées sur la phénoménologie du mécanisme d'inversion et d'excursion [Wicht et Olson, 2004, Wicht, 2005, Takahashi *et al.*, 2007, Aubert *et al.*, 2008a, Olson *et al.*, 2011] ainsi que sur l'influence des conditions aux limites [Glatzmaier *et al.*, 1999, Olson et Christensen, 2002, Kutzner et Christensen, 2002, Takahashi *et al.*, 2008, Hori *et al.*, 2010]. Grâce à l'augmentation des moyens de calcul, il devient possible de produire des séquences numériques de longue durée [voir p.ex. Wicht *et al.*, 2009, §5.4] et de s'intéresser aux facteurs qui contrôlent la fréquence des inversions. Deux études se sont récemment intéressées à la dépendance de la fréquence des inversions avec les paramètres de contrôle des simulations [Driscoll et Olson, 2009a] ainsi qu'avec le flux de chaleur à la frontière noyau-manteau [Olson *et al.*, 2010]. Une tentative a également été effectuée pour décrire l'évolution à long-terme de la fréquence des inversions en supposant une évolution des conditions aux limites régissant l'état du noyau [Driscoll et Olson, 2009b, 2011].

Dans ce chapitre, nous nous proposons de produire des séquences numériques de l'ordre de 30-50 millions d'années (c'est-à-dire approximativement la durée d'un segment de l'échelle des polarités géomagnétiques) pour étudier la statistique des inversions en l'absence de conditions aux limites particulières imposées à la frontière noyau-manteau. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la distribution de la durée des chrons ainsi qu'à l'existence éventuelle d'une corrélation entre la durée des chrons et l'intensité moyenne, en discutant dans les deux cas de l'influence d'inclure les chrons de petites tailles dans les statistiques.

TABLE 5.1 – Caractéristiques des modèles étudiés : nombre de Rayleigh Ra , nombre de Reynolds magnétique Rm , temps caractéristique τ_{SV} de la variation séculaire mesuré en unités de τ_v , temps caractéristique τ_e de croissance des erreurs mesuré en unités de τ_v , et dipolarité f_{dip} qui correspond à l’amplitude moyenne du champ dipolaire par rapport au champ total à la frontière noyau-manteau.

modèle	graine	Ra	τ_{SV}/τ_v	τ_e/τ_v	Rm	f_{dip}
(1)	isolante	130	0,57	1,42	110	0,55
(2)	conductrice	120	0,61	1,98	108	0,55
(3)	conductrice	150	0,48	1,04	133	0,48

5.2 Modèles étudiés

5.2.1 Choix des modèles

Nous choisissons de travailler sur trois dynamos numériques, dont les paramètres de contrôle sont proches de la dynamo solutale étudiée par Olson [2007] et Olson *et al.* [2009]. Celles-ci souffrent des lacunes classiques attribuées aux dynamos numériques, à savoir des paramètres de contrôle très éloignés des paramètres de contrôle de la Terre [voir p.ex. Wicht *et al.*, 2010, §2.4]. Mais contrairement aux dynamos thermiques qui ont l’inconvénient d’être faiblement dipolaires lorsqu’elles se situent dans un régime de paramètres qui présente des inversions [Kutzner et Christensen, 2002], ces dynamos solutales ont l’avantage d’être relativement dipolaires, et donc d’être de ce point de vue relativement semblables à la dynamo terrestre. Elles sont par ailleurs peu éloignées de la zone de similitude terrestre dans l’espace des paramètres décrite par Christensen *et al.* [2010]. Etant par ailleurs peu coûteuses en temps de calcul, ces dynamos solutales sont donc de bonnes candidates pour une utilisation dans une perspective de comparaisons avec les données paléomagnétiques. Il s’agit naturellement d’un compromis car elles sont par exemple peu satisfaisantes eu égard à leur prédictibilité. D’après les valeurs de la table 5.1, le rapport τ_e/τ_{SV} est en effet de l’ordre de 2-3 dans nos simulations numériques, alors qu’il devrait être de l’ordre de 0,05 pour la dynamo terrestre (voir chapitre 4). Cette lacune s’explique simplement par le fait que nos simulations fonctionnent avec une faible valeur du nombre de Reynolds magnétique Rm .

Nos trois séquences sont caractérisées par les paramètres de contrôle ($E = 6,5 \times 10^{-3}$, $Pr = 1$, $Pm = 20$), tandis que la valeur du nombre de Rayleigh Ra est décrite à la table 5.1 (se référer au chapitre 2 pour les définitions détaillées). Le premier modèle possède une graine isolante, alors que les deux autres possèdent une graine conductrice de même conductivité que le noyau externe [voir p.ex. Wicht, 2002]. Les trois séquences sont obtenues avec une résolution latérale de 44 harmoniques sphériques et une résolution radiale de 96 nœuds ajustée en conséquence. Elles sont bien résolues avec un rapport entre le minimum et le maximum des spectres spatiaux en puissance (intégrés sur le volume de la coquille) supérieur à 250 000 pour le champ de vitesse

et à 2 500 pour le champ magnétique. Avec le code PARODY utilisé sur le cluster de l'IPGP ou les machines de l'équipe de géomagnétisme, le rendement du code est optimal pour un calcul en parallèle sur 12 cœurs. Le pas de temps qui correspond en moyenne à $2,5 \times 10^{-4} \tau_v$ pour la séquence avec graine isolante et à $1,75 \times 10^{-4} \tau_v$ pour les séquences avec graine conductrice nécessite entre 70 et 90 ms de temps de calcul suivant les machines utilisées. Ceci permet d'intégrer l'équivalent d'un temps de diffusion magnétique en moins de 2 heures pour la séquence avec graine isolante et en moins de 3 heures pour les séquences avec graine conductrice.

5.2.2 Mise à l'échelle du temps

Avant de s'intéresser à la distribution de la durée des chrons, il est utile de se pencher sur la question de la remise à l'échelle de l'axe du temps dans les modèles numériques. Pour ce faire, nous envisageons dans cette section différentes options possibles et utilisons les conventions suivantes : le symbole $\dagger$ en exposant pour désigner une grandeur issue d'une séquence dynamo, le symbole $\oplus$ en exposant pour désigner une grandeur remise à l'échelle. Par soucis de clarté, nous surmontons également d'un tilde les grandeurs sans dimension.

Temps de diffusion de la quantité de mouvement

Dans la logique de l'adimensionnement en fonction du temps de diffusion $\tau_v = D^2/\nu$, le temps $t^\oplus$ remis à l'échelle s'exprime simplement par la relation

$$t^\oplus = \tau_v \times \tilde{t}_v^\dagger, \quad (5.3)$$

où $\tilde{t}_v^\dagger$ désigne le temps sans dimension donné en sortie du code numérique. En procédant de la sorte, nous supposons que la viscosité cinématique ν est correctement représentée dans le modèle de dynamo numérique. Cette hypothèse serait parfaitement vérifiée dans le cas où nous effectuerions des simulations avec des valeurs terrestres des paramètres de contrôle. Elle ne l'est cependant pas dans la pratique puisque nous sommes incapables de modéliser correctement les petites échelles du champ de vitesse, à cause des moyens de calcul limités dont nous disposons. Nous sommes en d'autres termes incapables de modéliser correctement la turbulence hydrodynamique, ce qui traduit quantitativement par une valeur inadéquate du nombre de Reynolds $Re = (U_0 D)/\nu$. En supposant d'après les modèles d'écoulement à la surface du noyau une valeur de la vitesse caractéristique U_0 de l'ordre de $15\text{-}20 \text{ km}\cdot\text{an}^{-1}$ [Hulot *et al.*, 2002], et d'après des simulations numériques modélisant les principes premiers de la dynamique moléculaire une valeur de la viscosité cinématique ν de l'ordre de $10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ [de Wijs *et al.*, 1998], on obtient un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^9 pour la dynamo terrestre. Etant donné que les modèles de dynamo numérique peuvent difficilement produire une valeur du nombre de Reynolds supérieure à 10^3 , on voit que la remise à l'échelle du temps en utilisant le temps de diffusion de la quantité de mouvement n'est clairement pas satisfaisante.

Temps de diffusion du champ magnétique

Comme on s'intéresse plus particulièrement au champ magnétique, on préfère en général travailler avec le temps de diffusion magnétique $\tau_\eta = D^2/\eta$, et le temps $t^\oplus$ remis à l'échelle s'exprime alors par la relation

$$t^\oplus = \tau_\eta \times \tilde{t}_\eta^\dagger, \quad (5.4)$$

où $\tilde{t}_\eta^\dagger = \tilde{t}_v^\dagger/Pm$ désigne le temps sans dimension du modèle exprimé en unités de temps de diffusion magnétique. En procédant de la sorte, nous supposons que la diffusivité magnétique η est identique dans le modèle et dans la Terre, ce qui revient à considérer une valeur adéquate du nombre de Reynolds magnétique $Rm = (U_0 D)/\eta$. Nous considérons ici la même estimation que dans le paragraphe précédent pour la vitesse caractéristique U_0 , et prenons d'après des mesures expérimentales à haute pression une valeur de la diffusivité magnétique η de l'ordre de $1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ [Secco et Schloessin, 1989]. Nous obtenons ainsi un nombre de Reynolds magnétique pour la dynamo terrestre de l'ordre de 10^3 . Dans des simulations à haute résolution, il est parfois possible d'atteindre une telle valeur mais il est plus courant de travailler dans la pratique avec une valeur inférieure à 250. Il convient donc d'être prudent lorsqu'on procède à la remise à l'échelle de l'axe du temps d'une simulation numérique en utilisant le temps de diffusion magnétique. Cette manière de procéder est moins grossière que lorsqu'on utilise le temps de diffusion de la quantité de mouvement, mais peut s'avérer approximative si on travaille avec une valeur trop faible du nombre de Reynolds magnétique. Notons que la remise à l'échelle de l'axe du temps basée sur le temps de décroissance du dipôle τ_{dip} n'est en fait qu'une variante de la remise à l'échelle de l'axe du temps basée sur le temps de diffusion magnétique τ_η , puisque ces deux grandeurs sont proportionnelles lorsqu'on ne varie pas le rapport d'aspect.

Temps caractéristique de la variation séculaire

Comme nous l'avons suggéré dans le chapitre 3, une manière élégante de remettre à l'échelle l'axe du temps d'une simulation numérique vers un axe du temps « terrestre » consiste à utiliser le temps caractéristique de la variation séculaire. Les spectres des temps de corrélation τ_n à partir desquels il est possible de déterminer le temps caractéristique τ_{SV} de la variation séculaire présentent en effet un comportement analogue dans les modèles de champ géomagnétique et les simulations numériques de géodynamo. Il est alors possible d'utiliser la grandeur τ_{SV} définie par la relation $\tau_n = \tau_{SV}/n$ ($n \geq 2$) pour bâtir une passerelle entre les simulations et le champ géomagnétique. Dans un adimensionnement donné, le temps $t^\oplus$ remis à l'échelle s'exprime alors par la relation

$$t^\oplus = \left(\frac{\tau_{SV}^\oplus}{\tilde{\tau}_{SV}^\dagger} \right) \times \tilde{t}^\dagger, \quad (5.5)$$

où $\tilde{t}^\dagger$ est le temps adimensionné de la simulation tandis que $\tilde{\tau}_{SV}^\dagger$ est la valeur adimensionnée du temps caractéristique de la variation séculaire du modèle.

Etant donné la dépendance linéaire inverse de τ_{SV} avec le nombre de Reynolds magnétique

TABLE 5.2 – Etude de la fréquence des inversions des trois séquences numériques en fonction du niveau de filtrage T_c : nombre N de chrons détectés ; fréquence moyenne f des inversions (en Ma^{-1}) ; paramètres k (sans unité) et μ (en Ma) de la distribution gamma. Les valeurs en gras correspondent aux maxima de vraisemblance alors que les valeurs adjacentes entre crochets correspondent à l'intervalle de confiance à 95%. Δt indique la longueur des séquences numériques.

modèle	Δt	N	f	k	μ
(1) : $T_c = 1\,000$ ans	50 Ma	113	2,25	[0,67 0,84 1,07]	[0,24 0,44 0,71]
(1) : $T_c = 10\,000$ ans	50 Ma	103	2,05	[0,87 1,11 1,42]	[0,25 0,48 0,79]
(1) : $T_c = 35\,000$ ans	50 Ma	93	1,85	[0,94 1,22 1,57]	[0,27 0,54 0,89]
(2) : $T_c = 1\,000$ ans	35 Ma	292	8,3	[0,72 0,82 0,95]	[0,08 0,12 0,16]
(2) : $T_c = 10\,000$ ans	35 Ma	214	6,08	[1,05 1,24 1,47]	[0,11 0,16 0,23]
(2) : $T_c = 35\,000$ ans	35 Ma	151	4,28	[1,31 1,61 1,98]	[0,14 0,23 0,34]
(3) : $T_c = 1\,000$ ans	37 Ma	1014	27,08	[0,76 0,82 0,89]	[0,03 0,04 0,04]
(3) : $T_c = 10\,000$ ans	37 Ma	459	12,24	[1,38 1,55 1,75]	[0,06 0,08 0,10]
(3) : $T_c = 35\,000$ ans	37 Ma	196	5,21	[1,59 1,91 2,29]	[0,12 0,19 0,27]

[Christensen et Tilgner, 2004], cette remise à l'échelle du temps revient implicitement à ajuster le niveau de turbulence magnétique du modèle numérique à celui de la dynamo terrestre, de telle sorte que

$$t^\oplus = \left(\frac{Rm^\dagger}{Rm^\oplus} \right) \times \tau_\eta \times \tilde{t}^\dagger. \quad (5.6)$$

La remise à l'échelle utilisant le temps caractéristique de la variation séculaire est cependant plus avantageuse qu'un simple ajustement de la turbulence magnétique puisque, comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, le facteur de proportionnalité entre τ_{sv} et Rm^{-1} est également sensible à la valeur du nombre d'Ekman. Cette méthode permet donc également d'atténuer les effets de la différence de viscosité entre le modèle numérique et la dynamo terrestre. Elle permet en d'autres termes de compenser les différences dans la géométrie de l'écoulement entre le modèle numérique et la dynamo terrestre. D'après les résultats obtenus dans le chapitre 3 pour le modèle *gufm1* durant la période des observatoires, nous choisissons dans ce chapitre de prendre la valeur $\tau_{sv}^\oplus = 450$ ans comme représentative de l'évolution du champ géomagnétique sur une échelle de temps paléomagnétique.

5.2.3 Application aux modèles étudiés

En utilisant la remise à l'échelle de l'axe du temps basée sur le temps caractéristique de la variation séculaire, l'intégration numérique d'un million d'années nécessite 4 à 5 jours de calcul pour la séquence avec graine isolante, et 6 à 7 jours de calcul pour les séquences avec graine conductrice. Après un an de calcul, nous avons donc obtenu des séquences temporelles dont la durée décrite à la table 5.2 varie entre 30 et 50 millions d'années. Comme la remise à l'échelle

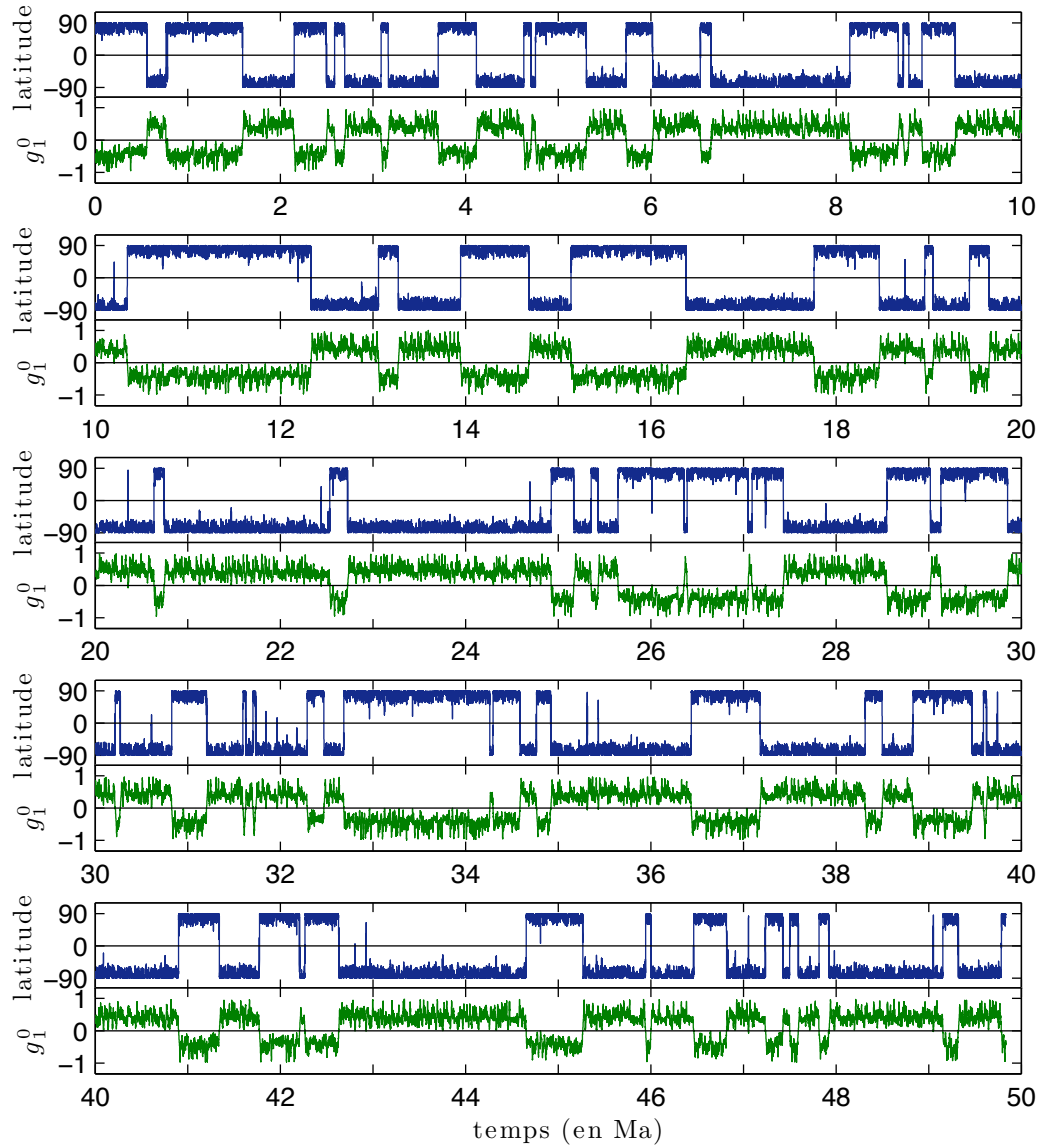


FIGURE 5.3 – Evolution temporelle de la séquence (1) avec une graine isolante : latitude (en degré) du dipôle en bleu ; amplitude g_1^0 (normalisée par le maximum) du dipôle axial en vert. L'axe du temps est présenté en millions d'années d'après la méthode proposée dans la section 5.2.2.

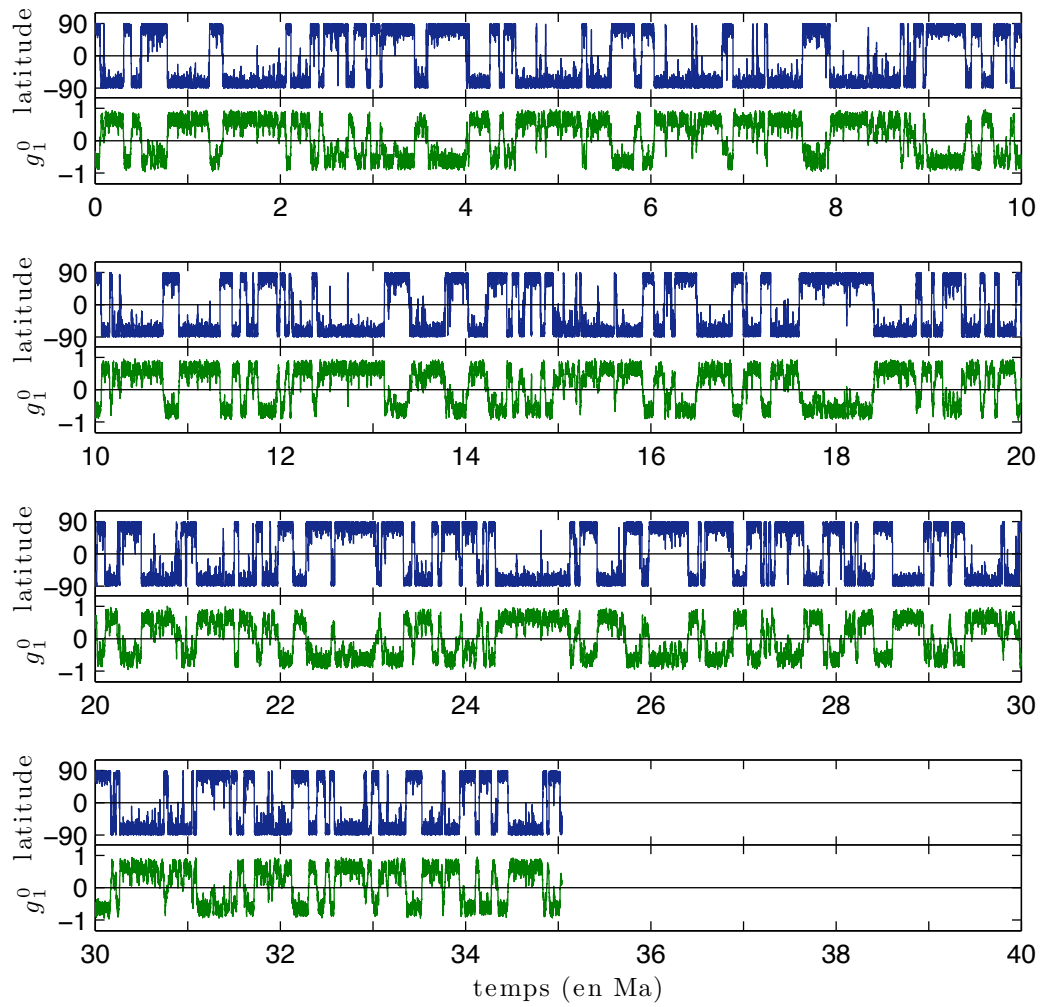


FIGURE 5.4 – Evolution temporelle de la séquence (2) avec une graine conductrice : latitude (en degré) du dipôle en bleu ; amplitude g_1^0 (normalisée par le maximum) du dipôle axial en vert. L'axe du temps est présenté en millions d'années d'après la méthode proposée dans la section 5.2.2.

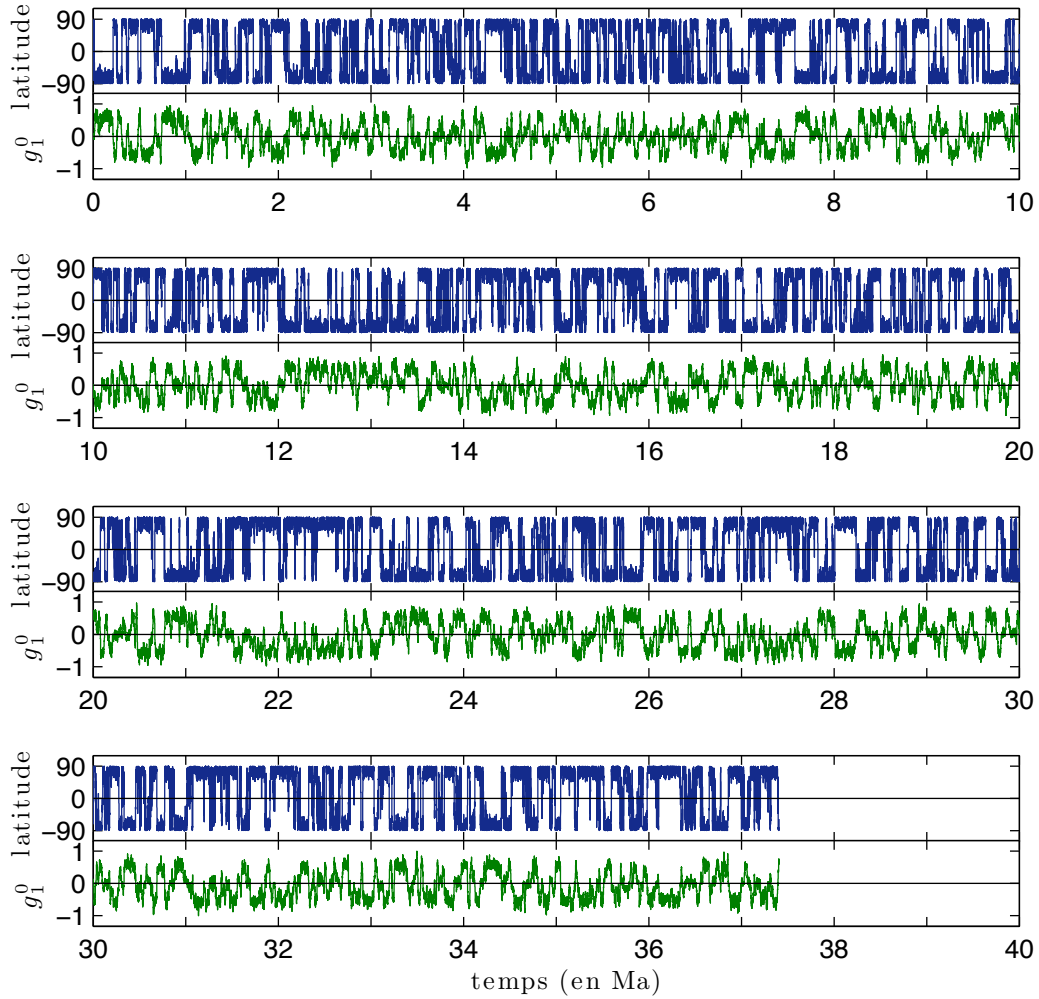


FIGURE 5.5 – Evolution temporelle de la séquence (3) avec une graine conductrice : latitude (en degré) du dipôle en bleu ; amplitude g_1^0 (normalisée par le maximum) du dipôle axial en vert. L'axe du temps est présenté en millions d'années d'après la méthode proposée dans la section 5.2.2.

du champ magnétique n'est pas une question cruciale dans cette étude, nous choisissons de rester avec une grandeur adimensionnée pour l'amplitude g_1^0 du dipôle axial. Nous présentons l'évolution temporelle de la séquence (1) à la figure 5.3, celle de la séquence (2) à la figure 5.4 et celle de la séquence (3) à la figure 5.5. Par rapport à la séquence (1), il est à noter que les séquences (2) et (3) présentent une variabilité plus importante durant les intervalles de polarité stable, avec notamment l'occurrence plus fréquente d'excursions.

5.3 Tendances observées

5.3.1 Fréquence moyenne des inversions

En accord avec les conventions du paléomagnétisme, nous définissons un chron comme l'intervalle de temps entre deux changements successifs de polarité du champ magnétique. Le critère quantitatif que nous nous donnons pour définir un changement de polarité est que la latitude du dipôle franchisse la valeur de 45 degrés dans la polarité inverse. Nous ajoutons à cela un critère de durée de manière à négliger les chrons d'une durée inférieure à T_c , et donc à les inclure à l'intérieur des deux chrons adjacents pour n'en former plus qu'un seul. Nous travaillons dans ce chapitre avec les valeurs $T_c = 1\,000$ ans, $10\,000$ ans et $35\,000$ ans, de manière à tester l'influence de l'inclusion des chrons de courte durée sur la statistique globale des inversions. La valeur de $35\,000$ ans correspond approximativement à la résolution des anomalies magnétiques du plancher océanique [voir p.ex. Bouligand *et al.*, 2006], et est donc bien approprié pour effectuer des comparaisons avec les données paléomagnétiques. Considérant une séquence de durée Δt et possédant N chrons, la fréquence moyenne des inversions vaut $f = (N - 1)/\Delta t$.

Les valeurs du nombre de chrons et de la fréquence moyenne des inversions sont présentées à la table 5.2 pour les trois niveaux de filtrages décrits précédemment : $T_c = 1\,000$ ans, $T_c = 10\,000$ ans, et $T_c = 35\,000$ ans. Les diagrammes de polarité sont également tracés à la figure 5.6 pour la séquence (1) avec une graine isolante, et à la figure 5.7 pour la séquence (2) avec une graine conductrice. Les séquences (1) et (2) présentent des valeurs entre 1 et 10 Ma^{-1} de la fréquence des inversions. La séquence (3) est plus chaotique avec une valeur de la fréquence des inversions qui excède 10 Ma^{-1} dans le cas des filtrages à $1\,000$ ans et $10\,000$ ans. De manière intéressante, elle retrouve cependant une valeur proche des séquences (1) et (2) lorsqu'on effectue un filtrage à $35\,000$ ans. En l'absence de forçage particulier à la frontière noyau-manteau, et en utilisant une remise à l'échelle de l'axe du temps qui respecte la dynamique du spectre spatial en puissance du champ magnétique terrestre, nous pouvons donc conclure que nous parvenons spontanément à des valeurs terrestres de la fréquence des inversions.

L'étude de Wicht [2002], qui s'intéressait à l'influence de la conductivité de la graine dans une suite de dynamos numériques dont le moteur était une convection d'origine thermique, concluait en l'absence de rôle significatif de cette caractéristique sur la fréquence des inversions. Notre étude est en relativement bon accord avec ce résultat dans la mesure où le passage d'une graine isolante (séquence (1)) vers une graine conductrice (séquence (2)) ne produit pas

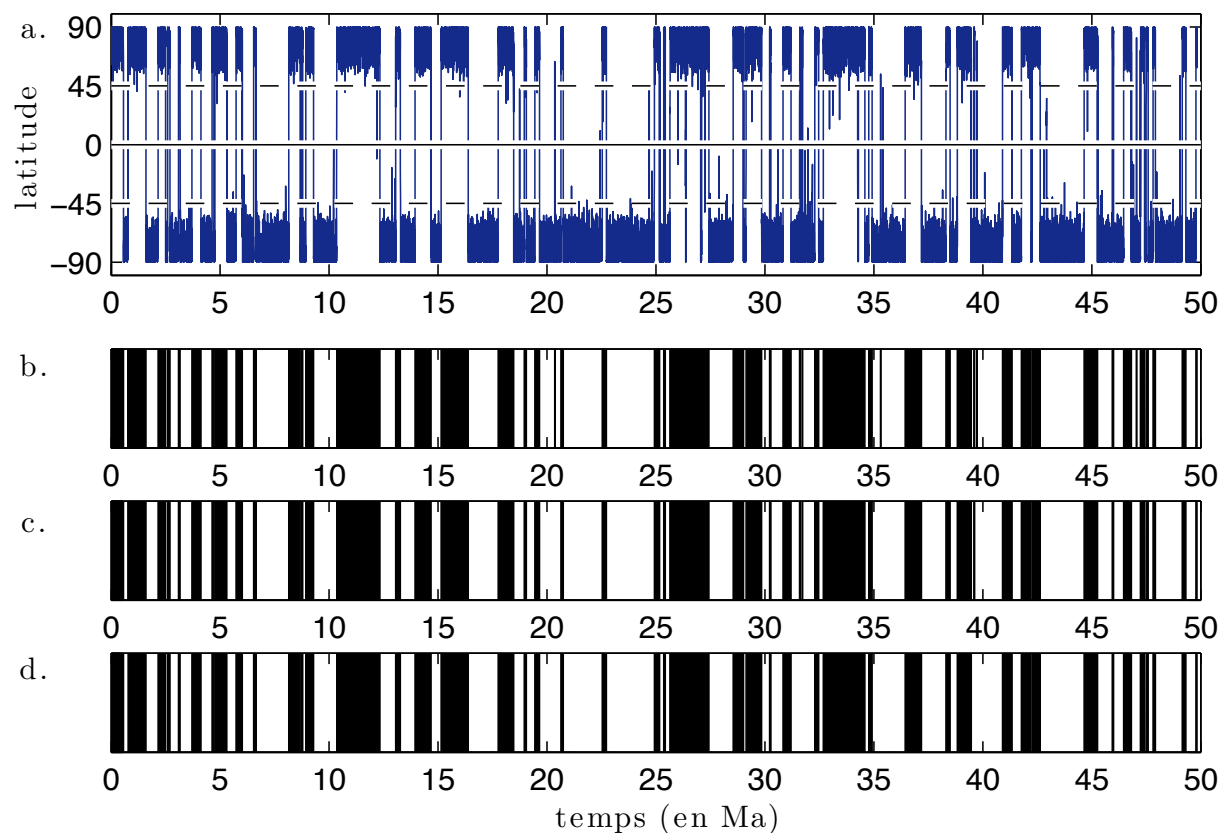


FIGURE 5.6 – Comportement de la séquence (1) en termes de fréquence des inversions : latitude du dipôle (panneau a) ; diagramme des polarités pour $T_c = 1\,000$ ans (panneau b), pour $T_c = 10\,000$ ans (panneau c), et pour $T_c = 35\,000$ ans (panneau d). Le dernier filtrage correspond approximativement à celui de l'échelle des polarités du champ magnétique terrestre.

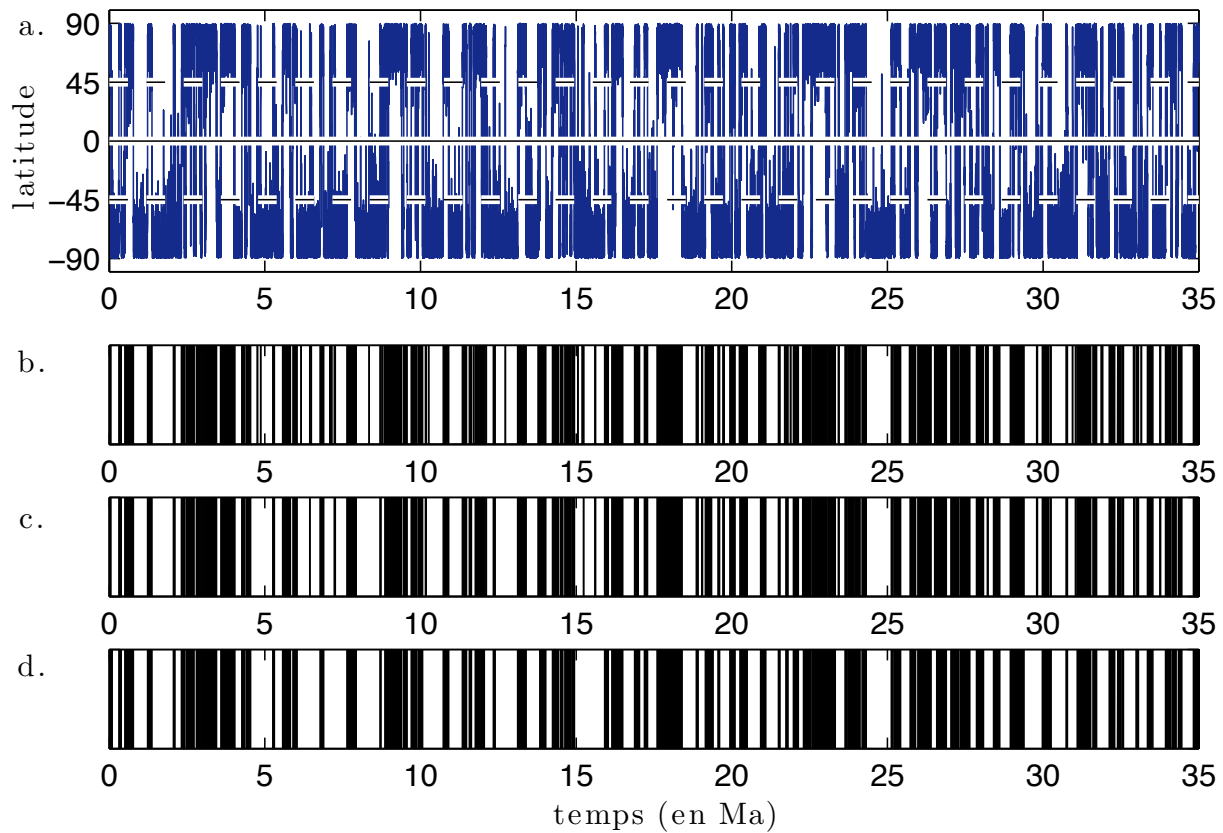


FIGURE 5.7 – Comportement de la séquence (2) en termes de fréquence des inversions : latitude du dipôle (panneau a) ; diagramme des polarités pour $T_c = 1\,000$ ans (panneau b), pour $T_c = 10\,000$ ans (panneau c), et pour $T_c = 35\,000$ ans (panneau d). Le dernier filtrage correspond approximativement à celui de l'échelle des polarités du champ magnétique terrestre.

des effets plus significatifs sur la fréquence des inversions qu'un faible changement du paramètre de forçage tel qu'il est effectué entre les séquences (2) et (3). Même si nos trois séquences numériques produisent des fréquences moyennes du même ordre de grandeur, notre étude souligne toutefois que la valeur exacte de ce paramètre présente une grande sensibilité.

5.3.2 Distribution de la durée des chrons

Nous nous intéressons dans cette section à la distribution de la durée des chrons. Pour chacune des trois séquences numériques, nous avons estimé les maxima de vraisemblance des paramètres k et μ de la distribution gamma en considérant les trois niveaux de filtrage décrits précédemment : $T_c = 1\,000$ ans, $T_c = 10\,000$ ans, et $T_c = 35\,000$ ans. Les valeurs des paramètres sont résumées à la table 5.2 et nous présentons également à la figure 5.8 les histogrammes de la durée des chrons pour les séquences (1) et (2). Les barres en gris correspondent aux distributions empiriques, alors que les courbes en rouge correspondent aux distributions gamma théoriques avec des valeurs des paramètres ajustées aux données. Partant d'un filtrage de la durée des chrons à $T_c = 35\,000$ ans, nous obtenons dans les trois cas une diminution de la valeur de l'indice k causée par l'inclusion successive de chrons de plus petite taille dans les statistiques lorsqu'on réduit T_c . Cette observation est logique et compatible avec les résultats de Lowrie et Kent [2004] décrivant une diminution de la valeur de l'indice k avec l'amélioration de la connaissance de l'échelle des polarités géomagnétiques et la détection de nouveaux cryptochrons. Notons que les valeurs de k sont supérieures à 1 pour $T_c = 10\,000$ ans et $T_c = 35\,000$ ans, mais deviennent inférieures à 1 pour $T_c = 1\,000$ ans. La valeur de k inférieure à 1 (qui s'interprète comme un encouragement de la dynamo à s'inverser) provient donc nécessairement de l'ajout de chrons dont la durée est comprise entre 1 000 ans et 10 000 ans. Ces courts intervalles étant de l'ordre de la durée des inversions, il n'est pas étonnant que leur ajout conduise à un changement de comportement du processus d'inversion. Notons qu'un effet de mémoire peut par ailleurs parfaitement expliquer cette observation dans nos simulations puisque le temps caractéristique τ_e de croissance des erreurs (étudié au chapitre 5) est précisément de l'ordre de 1000 ans (valeur déduite d'après la table 5.1 qui indique que τ_e/τ_{SV} est de l'ordre de 2-3).

Comme cela est présenté à la table 5.1, la séquence (3) possède une dipolarité (amplitude moyenne du champ dipolaire par rapport au champ total à la frontière noyau-manteau) plus faible que les séquences (1) et (2), et est donc de ce point de vue un peu moins analogue à la Terre qui possède une dipolarité d'environ 0,65³ [d'après le modèle *gufm1* de Jackson *et al.*, 2000]. Nous nous concentrons donc sur les séquences (1) et (2); et de manière intéressante, la séquence (2) avec graine conductrice présente une bonne analogie avec les 31 derniers millions d'années de l'échelle des polarités géomagnétiques. Avec un filtrage à $T_c = 35\,000$ ans (cas qui correspond à la situation où on ne prend pas en compte les cryptochrons dans l'échelle des polarités géomagnétiques), on obtient une valeur $k = 1,61 \pm_{0,30}^{0,37}$ (contre $k = 1,6 \pm 0,4$ pour les 31 derniers millions d'années). Avec un filtrage $T_c = 10\,000$ ans (cas qui correspond approximativement à la situation

³Cette estimation est effectuée pour un champ total tronqué au degré 13. La valeur comparable avec la dipolarité des séquences dynamo est donc probablement quelques pourcents moindre.

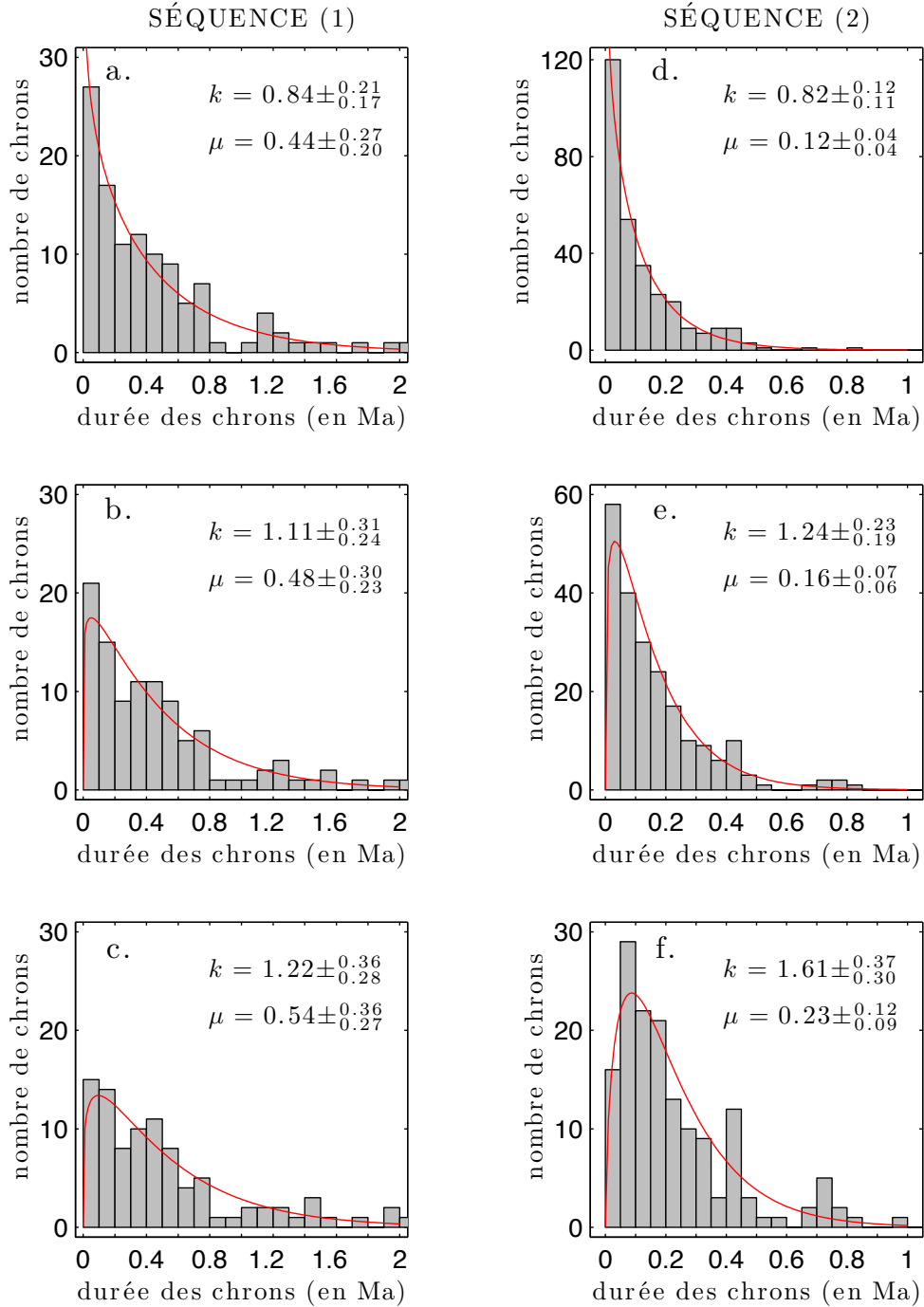


FIGURE 5.8 – Distribution de la durée des chrons : pour la séquence (1) dans la colonne de gauche (panneaux a-c) ; pour la séquence (2) dans la colonne de droite (panneaux d-f). La première ligne (panneaux a,d) correspond à un filtrage pour $T_c = 1\,000$ ans, la deuxième ligne (panneaux b,e) à un filtrage pour $T_c = 10\,000$ ans, la troisième colonne (panneaux c,f) à un filtrage pour $T_c = 35\,000$ ans. Les valeurs de k sont sans unité, alors que les valeurs de μ sont exprimées en Ma.

où on inclut les cryptochrons détectables dans l'échelle des polarités géomagnétiques), on obtient une valeur $k = 1,24 \pm_{0,19}^{0,23}$ (contre $k = 1,3 \pm 0,3$ pour les 31 derniers millions d'années). Nous obtenons ainsi un résultat en relativement bon accord avec l'étude de Lowrie et Kent [2004], selon laquelle la valeur de k pour la dynamo terrestre ne serait pas significativement différente de 1, ce qui aurait pour implication l'absence de mémoire à long terme du processus d'inversion.

5.3.3 Corrélation entre la durée des chrons et l'intensité moyenne

Pour tester l'existence éventuelle d'une corrélation entre la durée des chrons et l'amplitude du dipôle axial, nous nous concentrons dans cette partie sur la séquence (2) qui a montré sa bonne capacité à reproduire le comportement de la géodynamo en termes de fréquence moyenne des inversions et de distribution de la durée des chrons. Pour la détermination des intervalles de polarité stable, nous travaillons comme précédemment avec les trois niveaux de filtrage : $T_c = 1\,000$ ans, $T_c = 10\,000$ ans, et $T_c = 35\,000$ ans. Nous représentons dans la colonne de gauche de la figure 5.9 l'intensité moyenne du dipôle axial en fonction de la durée des chrons. Le graphe du panneau a est calculé pour un niveau de filtrage $T_c = 1\,000$ ans et montre l'existence d'une corrélation positive entre la durée des chrons et l'amplitude du dipôle axial pour des durées entre 1 000 ans et 100 000 ans. Cette corrélation est tout naturellement moins présente dans les panneaux b et c puisqu'on travaille avec des niveaux de filtrage $T_c = 10\,000$ ans et $T_c = 100\,000$ ans. Concernant la variabilité du dipôle axial, les panneaux d-f de la colonne de droite de la figure 5.9 montrent les mêmes tendances que pour l'intensité moyenne, à savoir une corrélation positive pour des durées de chrons entre 1 000 ans et 100 000 ans. Que l'on s'intéresse à l'intensité moyenne ou la variabilité du dipôle axial, notre modèle numérique n'indique en revanche aucune corrélation avec la durée des chrons pour des durées supérieures à 100 000 ans.

5.4 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre qu'avec des modèles bien choisis (compte tenu de la connaissance actuelle que nous avons de l'espace des paramètres) et en utilisant une remise à l'échelle de l'axe du temps fondée sur le temps caractéristique τ_{SV} de la variation séculaire (compte tenu de la connaissance actuelle que nous avons des spectres en puissance du champ magnétique terrestre), nous étions en mesure d'obtenir des séquences temporelles présentant un comportement, en termes de fréquence des inversions, similaire à celui de la géodynamo. En nous appuyant sur des séquences couvrant l'équivalent de 30 à 50 millions d'années terrestres, nous avons d'une part sondé l'effet d'inclure des cryptochrons sur la distribution de la durée des chrons, et avons formulé des observations compatibles avec l'analyse de Lowrie et Kent [2004] sur l'échelle des polarités magnétiques des derniers 160 millions d'années. Nous nous sommes d'autre part appliqués à tester l'hypothèse d'une corrélation entre l'intensité moyenne et la durée des chrons [comme elle a été suggérée par Tauxe et Hartl, 1997, Constable *et al.*, 1998], et avons effectivement observé cette corrélation, avec la réserve toutefois que celle-ci serait valable uniquement

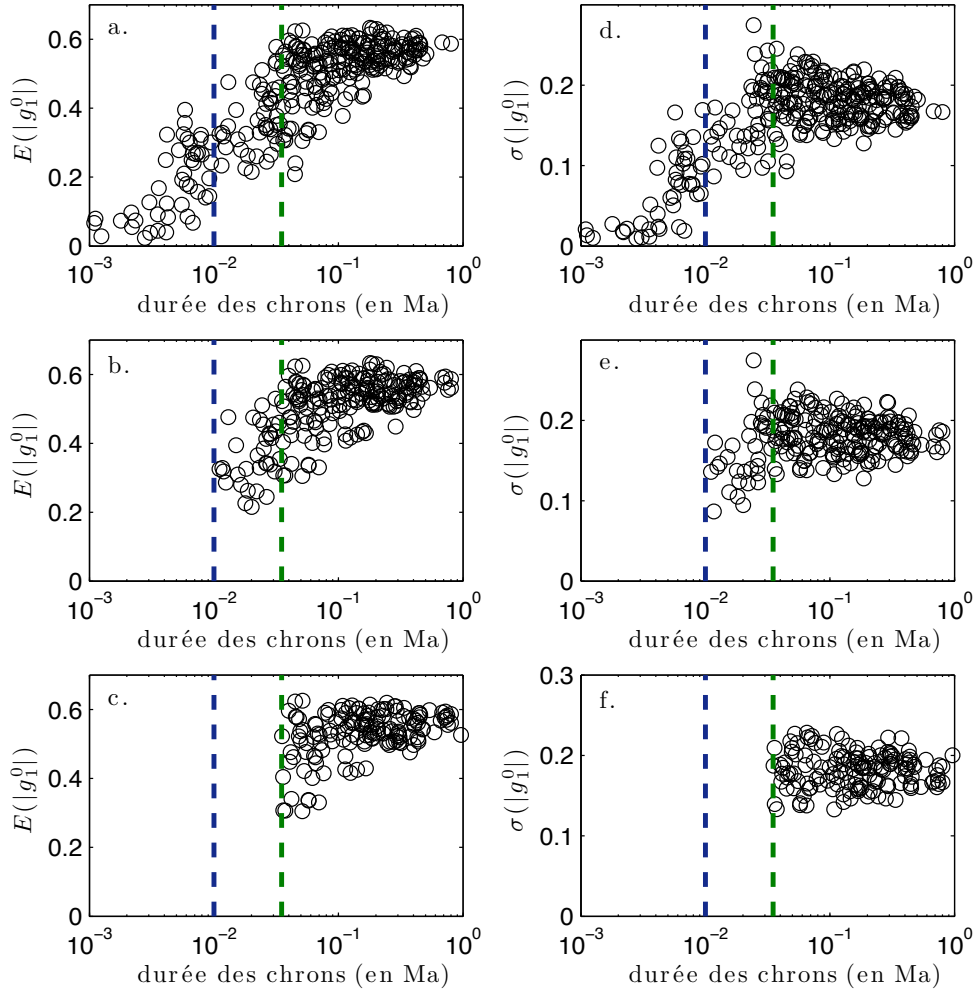


FIGURE 5.9 – Test de la corrélation : entre la durée des chrons et l’amplitude moyenne du dipôle axial dans la colonne de gauche (panneaux a-c) ; entre la durée des chrons et l’écart-type sur l’amplitude du dipôle axial dans la colonne de droite (panneaux d-f). La première ligne (panneaux a,d) correspond à un filtrage pour $T_c = 1\,000$ ans, la deuxième ligne (panneaux b,e) à un filtrage pour $T_c = 10\,000$ ans, la troisième colonne (panneaux c,f) à un filtrage pour $T_c = 35\,000$ ans. Les traits pointillés bleu rappellent la valeur $T_c = 10\,000$ ans, alors que les traits pointillés verts rappellent la valeur $T_c = 35\,000$ ans.

pour des durées d'intervalles inférieures à 100 000 ans, la corrélation disparaissant complètement pour des durées plus longues. L'étude de Tauxe [2006] [voir également Tauxe et Yamazaki, 2007] suggère plus généralement l'existence d'une corrélation entre la variabilité de l'intensité et la durée des chrons, pour des durées allant jusqu'au superchron. Nos modèles de dynamo sont cependant mal armés pour répondre à cette question, car il est probable que des changements graduels ou spontanés du régime de la géodynamo interviennent à de telles échelles de temps. En l'absence de changements de régime, notre étude suggère toutefois une saturation de l'intensité, et donc une absence de corrélation, pour des intervalles de polarité plus longs que 100 000 ans.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans le chapitre 3 aux temps de corrélation τ_n (échelles de temps qui caractérisent la variation séculaire du champ géomagnétique à différentes échelles spatiales) et nous sommes attachés à montrer que ces derniers présentaient un comportement similaire robuste pour les modèles de champ géomagnétique et les simulations numériques de la géodynamo, à savoir une décroissance systématique des τ_n en fonction du degré n de la décomposition en harmoniques sphériques. Nous avons plus précisément établi qu'une loi linéaire inverse $\tau_n = \tau_{SV}/n$ (telle qu'elle a été initialement proposée par Christensen et Tilgner [2004]) était satisfaisante pour expliquer cette décroissance en se restreignant aux composantes non-dipolaires du champ ($n \geq 2$), et de plus compatible avec les fluctuations naturelles prédites pour les τ_n par le modèle SIS [Hulot et Le Mouél, 1994]. Comme cela est véhiculé par la dépendance au premier ordre de τ_{SV} avec l'inverse Rm^{-1} du nombre de Reynolds magnétique (telle qu'elle a été initialement décrite par Christensen et Tilgner [2004], et également discutée dans le chapitre 4), ce résultat tend à confirmer que la variation séculaire (telle qu'elle est capturée et décrite par les τ_n) serait essentiellement gouvernée par un processus de transport.

Entre les modèles de champ géomagnétique et les simulations numériques de la géodynamo, les comportements robustes de similitude ne sont pas toujours légion [voir p.ex. Dormy *et al.*, 2000]. Par leur caractère indéfectible (pour peu qu'on travaille avec des dynamos suffisamment turbulentes, avec de manière indicative $Rm \geq 100$), les spectres des temps de corrélation sont en ce sens d'excellents candidats pour bâtir une passerelle entre les observations et les modèles. Le temps caractéristique τ_{SV} de la variation séculaire permet notamment d'extrapoler un temps caractéristique d'une simulation numérique vers la dynamo terrestre (démarche que nous avons utilisé dans le chapitre 4 pour déterminer la limite de prédictibilité de la dynamo terrestre). Nous proposons également son utilisation pour la remise à l'échelle de l'axe du temps d'une simulation numérique vers un axe du temps « terrestre » (démarche expérimentée par Fournier *et al.* [2011a] dans une perspective d'assimilation des données géomagnétiques). Comme nous l'avons discuté dans le chapitre 5, cette méthode revient implicitement à ajuster le niveau de turbulence magnétique du modèle numérique à celui de la dynamo terrestre. Elle est cependant plus avantageuse qu'un simple ajustement de ce genre puisque, comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, le fac-

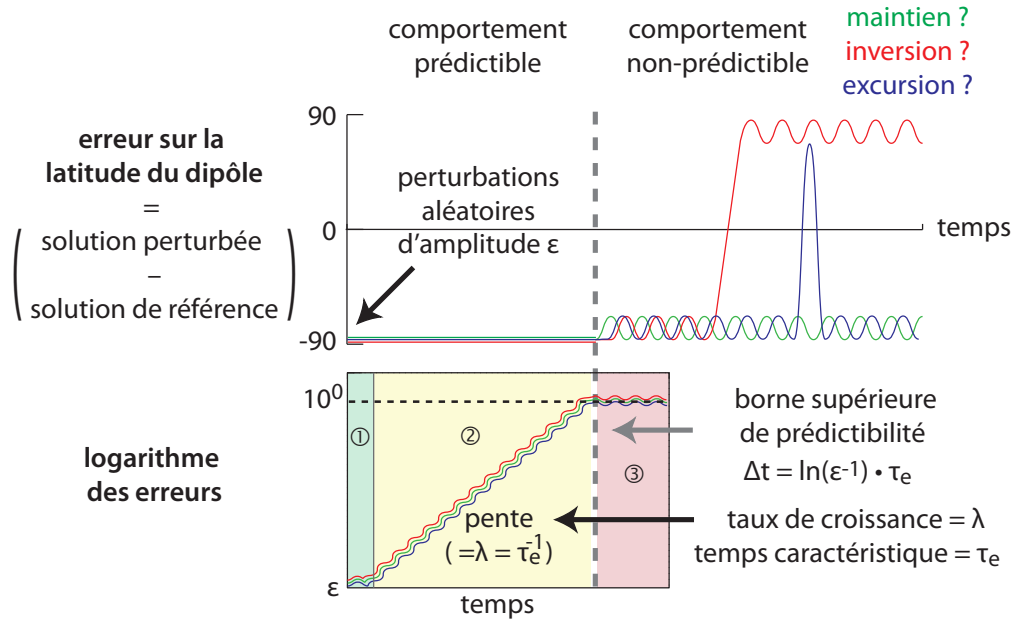


FIGURE 6.1 – Schéma de la méthode perturbative utilisée dans le chapitre 4 pour déterminer la limite de prédictibilité de la géodynamo.

teur de proportionnalité entre τ_{SV} et Rm^{-1} est également sensible à la valeur du nombre d'Ekman. Elle permet donc également d'atténuer la différence de viscosité entre le modèle numérique et la dynamo terrestre.

Dans le chapitre 4, nous nous sommes intéressés à la question de la prédictibilité de la géodynamo, à savoir combien de temps à l'avance il serait éventuellement possible de prédire le champ magnétique terrestre si on disposait d'un tel algorithme de prédiction. Nous nous sommes pour cela inspirés de la méthode dynamique utilisée en météorologie [voir p.ex. Lorenz, 1965] reposant l'étude de la divergence de solutions jumelles provenant de conditions aux limites légèrement différentes. D'un point de vue phénoménologique, nous avons montré que l'introduction d'une erreur contrôlée à un instant donné d'une simulation numérique produisait une réponse que l'on pouvait décrire schématiquement en trois phases (voir figure 6.1 pour une synthèse) : une phase de mobilisation (en vert), une phase de croissance exponentielle (en jaune), une phase de développement libre (en rose). La phase de mobilisation (très courte devant la phase de croissance exponentielle) correspond au temps de réponse du système, durant lequel la perturbation initiale est transmise à l'ensemble des potentiels harmoniques. La phase de croissance exponentielle correspond proprement dit à la phase d'amplification des erreurs, et joue donc une influence clef sur la prédictibilité de la géodynamo. La phase de développement libre survient finalement à l'issue de la croissance exponentielle des erreurs lorsque toute relation apparente est perdue entre la solution de référence et la solution perturbée. Nous avons montré que l'amplification exponentielle des erreurs s'effectuait avec un taux $\lambda = \tau_e^{-1}$ indépendant du type et de l'amplitude de la perturbation initiale.

D'un point de vue systématique, nous avons alors étudié la valeur du temps caractéristique τ_e sur une cinquantaine de dynamos numériques, et avons montré que τ_e^{-1} était proportionnel à une échelle de temps advective, à la réserve toutefois d'une dépendance du facteur de proportionnalité avec le nombre d'Ekman. Cette dépendance non simplement quantifiable avec le nombre d'Ekman proscrivait toute interpolation directe à la dynamo terrestre. Comme le temps caractéristique τ_{SV} de la variation séculaire (étudié dans le chapitre 3) présentait le même genre de comportement, ceci nous a naturellement conduit à étudier le rapport τ_e/τ_{SV} , dont nous avons montré l'existence d'un régime asymptotique $\tau_e/\tau_{SV} = 0,05$ applicable à la dynamo terrestre (voir section 4.4.2 et l'annexe B). Cette méthode fournissait un moyen pratique d'estimer τ_e pour la dynamo terrestre, mais ne renseignait cependant pas sur le mécanisme intrinsèque contrôlant la croissance exponentielle des erreurs. En utilisant l'échelle de temps de la dissipation magnétique τ_{diss}^{mag} (caractérisant le taux avec lequel l'énergie magnétique est produite pour compenser la dissipation ohmique), nous avons plus précisément montré l'existence d'un régime asymptotique $\tau_e/\tau_{diss}^{mag} = 1$ applicable à la dynamo terrestre (voir section 4.4.3). Ce résultat est plus satisfaisant que le précédent car il identifie plus clairement le mécanisme qui contrôle la croissance exponentielle des erreurs, à savoir la dissipation magnétique des petites échelles de l'écoulement.

A partir de la connaissance que nous avons du temps caractéristique τ_e , il est alors possible de faire des pronostics sur la limite de prédictibilité de la géodynamo (voir section 4.6 et l'annexe B). Supposant un schéma d'assimilation parfait, la portée de prédictibilité dépend à la fois de la capacité intrinsèque du système à faire croître des erreurs (quantifiable par la valeur de τ_e) et du niveau initial des erreurs provenant de la connaissance lacunaire que nous avons des conditions aux limites ainsi que des erreurs annexes liées notamment à la résolution spatio-temporelle limitée de l'algorithme. Nous avons suggéré que nous pourrions ainsi nous attendre à une portée de prédictibilité entre 50 et 100 ans, correspondant indicativement au temps nécessaire pour une amplification par dix des erreurs initiales. Ce résultat pose cependant plusieurs questions. Partant du constat que la phase de mobilisation était toujours très courte devant la phase de croissance exponentielle, nous avons passé sous silence cette dernière. Est-elle pour autant négligeable ? Quelle mécanisme physique la contrôle ? On pourrait imaginer que cette phase implique différentes échelles de temps : une échelle de temps dynamique qui serait tout d'abord responsable de la transmission des erreurs par un phénomène de propagation d'ondes [voir p.ex. Finlay, 2007, 2008] ; une échelle de temps advective qui contribuerait ensuite à préparer le système à la croissance exponentielle. La compréhension de cette phase serait probablement importante pour la stabilité des algorithmes d'assimilation actuellement en développement [voir p.ex. Fournier *et al.*, 2010]. Une autre question importante concerne l'interprétation du temps caractéristique τ_e . S'applique-t-il à toutes les échelles spatiales du champ magnétique, ou uniquement aux petites échelles ? Comme en météorologie [voir p.ex. Kalnay, 2002, §6], existe-t-il différents niveaux de prédictibilité ? A côté de la prédictibilité de premier ordre caractérisée par τ_e et s'appliquant aux détails de l'évolution du champ magnétique terrestre, on pourrait en effet imaginer qu'il existe une prédictibilité à plus long terme qui s'applique à des caractéristiques dominantes du champ tels que par exemple les variations lentes de l'amplitude du dipôle axial [voir p.ex. Olson et Amit, 2006].

Dans une perspective d'assimilation des données géomagnétiques [voir p.ex. Fournier *et al.*, 2010], nous avons vu qu'il pourrait être pertinent d'utiliser le temps caractéristique τ_{SV} de la variation séculaire pour remettre à l'échelle l'axe du temps d'une simulation numérique. La même question se pose d'ailleurs pour la remise à l'échelle du champ magnétique [voir p.ex. Kuang *et al.*, 2009, Fournier *et al.*, 2011a]. Mais avant de procéder à la remise à l'échelle des grandeurs d'une simulation de la géodynamo, une question préalable fondamentale concerne le choix du modèle numérique. L'étude de Christensen *et al.* [2010] a proposé des critères statiques pour quantifier le degré de similitude entre un modèle numérique et le champ magnétique terrestre. Ces critères sont-ils pertinents d'un point de vue dynamique ? L'étude préliminaire de Fournier *et al.* [2011b] souligne que ces critères ne permettent pas nécessairement de sélectionner les modèles numériques présentant une variation séculaire satisfaisante pour un algorithme d'assimilation des données. Comment est-il possible de caractériser cette similitude dynamique ? La valeur du rapport τ_e/τ_{SV} constitue-t-elle une indication de cette similitude ? Existe-t-il d'autres critères plus appropriés pour la quantifier ? La réponse à ces questions pourrait mieux motiver le choix des modèles numériques utilisés par les futurs algorithmes d'assimilation des données.

Dans le chapitre 5, nous nous sommes intéressés de manière exploratoire à un aspect de la variabilité à long terme du champ magnétique terrestre, à savoir la distribution de la durée des chrons. Nous avons notamment illustré la pertinence d'utiliser le temps caractéristique τ_{SV} de la variation séculaire (étudié dans le chapitre 3) pour remettre à l'échelle l'axe du temps de nos simulations. Grâce à cette manière de procéder, nous avons en effet obtenu spontanément des valeurs « terrestres » de la fréquence des inversions (telles qu'elles sont connues pour les 160 derniers millions d'années [voir p.ex. Lowrie et Kent, 2004]). Nous avons cependant observé que la valeur exacte de la fréquence des inversions était un paramètre très sensible et qu'une infime différence des paramètres de contrôle pouvait occasionner sur elle des effets importants. En effectuant un filtrage artificiel sur les chrons de courte durée, nous avons dans ce chapitre simulé de manière simpliste l'équivalent de l'échelle des polarités géomagnétiques. Dans une perspective plus générale de comparaison entre de longues simulations numériques et des données paléomagnétiques — possibilité désormais offerte grâce à l'augmentation des capacités de calcul et à la meilleure connaissance que nous avons de l'espace des paramètres — une manière plus rigoureuse de procéder consisterait à créer des observations synthétiques à partir des sorties des simulations numériques (dans l'esprit de l'étude de Kutzner et Christensen [2004]). Ceci permettrait une comparaison plus limpide avec les données paléomagnétiques, et l'exploration d'autres aspects de la variabilité temporelle à long terme de la géodynamo tels que la paléovariation séculaire durant les intervalles de polarité stable (en travaillant en particulier sur la dispersion des pôles géomagnétiques virtuels), ou la paléointensité durant les périodes d'inversion (en continuation par exemple de l'étude de Olson *et al.* [2011]).

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Claude Jaupart et Gauthier Hulot pour m'avoir accueilli il y a trois ans dans leurs équipes respectives de dynamique des fluides géologiques et géomagnétisme au sein de cet agréable institut, et pour m'avoir permis d'accomplir ma thèse dans une atmosphère sereine et des conditions de travail optimales. Mes remerciements vont ensuite tout naturellement à mes directeurs de thèse Gauthier Hulot et Julien Aubert qui m'ont encadré avec patience, disponibilité et bienveillance durant ces trois années. J'exprime par ailleurs ma vive gratitude à Alexandre Fournier et Yves Gallet sans qui les chapitres 3 et 5 de ce mémoire n'auraient pu voir le jour. L'assistance technique d'Olivier Sirol, de Geneviève Moguilny et du service informatique a également été d'un grand secours. Les discussions avec mes collègues de bureau, camarades de thèse et compagnons de table (qu'ils soient géomagnéticiens, paléomagnéticiens ou dynamiciens des fluides) ont incontestablement été source de détente, richesse et inspiration. Je remercie chaleureusement Dominique Jault et Catherine Johnson d'avoir accepté de rapporter ce travail, ainsi que Vincent Courtillot et Stuart Gilder pour leur participation à mon jury de thèse. Je tiens finalement à remercier Olivier de Viron et Jean-Pascal Cogné pour m'avoir assisté dans mes tâches d'enseignement, mes étudiants pour leur agilité d'esprit claire et pétillante, ainsi que Elske pour sa gentillesse sans pareille. Vielen Dank Aglaé und Julia für die deutsche Zusammenfassung! Tuhannet kiitokset Annalle suomenkielisestä tiivistelmästä! Tämä väitöskirja on omistettu Hetalle.

Bibliographie

- L. R. Alldredge. Harmonics Required in Main Field and Secular Variation Models. *J. Geomagn. Geoelec.*, 36(2):63–72, 1984.
- L. R. Alldredge. Comments on "Remark on the Secular Change in the Energy Density Spectrum of the Geomagnetic Field" by Joachim Meyer. *J. Geomagn. Geoelec.*, 38(2):171–172, 1986.
- C. J. Allègre, J.-P. Poirier, E. Humler, et A. W. Hofmann. The chemical composition of the Earth. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 134(3-4):515–526, 1995. doi: 10.1016/0012-821X(95)00123-T.
- H. Amit, R. Leonhardt, et J. Wicht. Polarity Reversals from Paleomagnetic Observations and Numerical Dynamo Simulations. *Space Sci. Rev.*, 155:293–335, 2010. doi: 10.1007/s11214-010-9695-2.
- J. Aubert, H. Amit, G. Hulot, et P. L. Olson. Thermochemical flows couple the Earth's inner core growth to mantle heterogeneity. *Nature*, 454(7205):758–U80, 2008a. doi: 10.1038/nature07109.
- J. Aubert, J. M. Aurnou, et J. Wicht. The magnetic structure of convection-driven numerical dynamos. *Geophys. J. Int.*, 172(3):945–956, 2008b. doi: 10.1111/j.1365-246X.2007.03693.x.
- J. Aubert, S. Labrosse, et C. Poitou. Modelling the palaeo-evolution of the geodynamo. *Geophys. J. Int.*, 2009. doi: 10.1111/j.1365-246X.2009.04361.x.
- J. Aubert, J. Tarduno, et C. Johnson. Observations and Models of the Long-Term Evolution of Earth's Magnetic Field. *Space Sci. Rev.*, 155:337–370, 2010. doi: 10.1007/s11214-010-9684-5.
- G. Backus, R. Parker, et C. Constable. *Foundations of Geomagnetism*. Cambridge University Press, 1996. ISBN 0-521-41006-1.
- C. D. Beggan et K. A. Whaler. Forecasting change of the magnetic field using core surface flows and ensemble Kalman filtering. *Geophys. Res. Lett.*, 36:L18303, 2009. doi: 10.1029/2009GL039927.

- M. Berhanu, R. Monchaux, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrelis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Du-brulle, L. Marie, F. Ravelet, M. Bourgoïn, P. Odier, J.-F. Pinton, et R. Volk. Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo. *Europhys. Lett.*, 77(5), 2007. doi: 10.1209/0295-5075/77/59001.
- F. Birch. Elasticity and constitution of the Earth's interior. *J. Geophys. Res.*, 57(2):227–286, 1952. doi: 10.1029/JZ057i002p00227.
- F. Birch. Density and Composition of Mantle and Core. *J. Geophys. Res.*, 69(20):4377–4388, 1964. doi: 10.1029/JZ069i020p04377.
- P. Blackett. The magnetic field of massive rotating bodies. *Nature*, 159(4046):658–666, 1947. doi: 10.1038/159658a0.
- R. J. Blakely. *Potential theory in gravity and magnetic applications*. Cambridge University Press, 1995. ISBN 0-521-41508-X.
- C. Bouligand, J. Dyment, Y. Gallet, et G. Hulot. Geomagnetic field variations between chrons 33r and 19r (83–41 Ma) from sea-surface magnetic anomaly profiles. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 250(3–4):541–560, Oct 2006. doi: 10.1016/j.epsl.2006.06.051.
- S. Braginsky et P. H. Roberts. Equations governing convection in Earth's core and the geodynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 79(1–4):1–97, 1995. doi: 10.1080/03091929508228992.
- E. Bullard et H. Gellman. Homogeneous Dynamos and Terrestrial Magnetism. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 247(928):213–278, 1954. URL <http://www.jstor.org/stable/91568>.
- K. E. Bullen. The problem of the Earth's density variation. *Bull. Seismolog. Soc. Am.*, 30(3):235–250, 1940. URL <http://www.bssaonline.org/cgi/content/abstract/30/3/235>.
- K. E. Bullen. The density variation of the Earth's central core. *Bull. Seismolog. Soc. Am.*, 32(1): 19–29, 1942. URL <http://www.bssaonline.org/cgi/content/abstract/32/1/19>.
- K. E. Bullen. An Earth model based on a compressibility-pressure hypothesis. *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, 6:50–59, 1950. doi: 10.1111/j.1365-246X.1950.tb02973.x.
- R. F. Butler. *Paleomagnetism : magnetic domains to geologic terranes*. Blackwell Scientific, Oxford, 1992. ISBN 0-86542-070-X.
- W. H. Campbell. *Introduction to Geomagnetic Fields*. Cambridge University Press, 2nd édn, 2003. ISBN 0-521-82206-8.
- S. C. Cande et D. V. Kent. Revised calibration of the geomagnetic polarity timescale for Late Cretaceous and Cenozoic. *G. Geophys. Res.*, 100(B4):6093–6095, 1995. doi: 10.1029/94JB03098.

- E. Canet, A. Fournier, et D. Jault. Forward and adjoint quasi-geostrophic models of the geomagnetic secular variation. *J. Geophys. Res.*, 114(B11101), 2009. doi: 10.1029/2008JB006189.
- C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, et T. A. Zang. *Spectral Methods : Fundamentals in Single Domains*. Springer, 2006. doi: 10.1007/978-3-540-30726-6.
- P. Cardin et P. Olson. Experiments on Core Dynamics. In P. Olson et G. Schubert, édés, *Core Dynamics*, vol. 8 de *Treatise on Geophysics*, p. 319–343. Elsevier, Amsterdam, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00136-X.
- J. Channell, E. Erba, M. Nakanishi, et K. Tamaki. Late Jurassic-Early Cretaceous time scales and oceanic magnetic anomaly block models. In W. Berggren, édés, *Geochronology, time scales and global stratigraphic correlation*. SEPM, 1995.
- J. Charney, R. Fleagle, H. Riehl, V. Lally, et D. Wark. The feasibility of a global observation and analysis experiment. *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 47:200–220, 1966.
- U. R. Christensen. Dynamo Scaling Laws and Applications to the Planets. *Space Sci. Rev.*, 152:565–590, 2010. doi: 10.1007/s11214-009-9553-2.
- U. R. Christensen et J. Aubert. Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophys. J. Int.*, 166(1):97–114, 2006. doi: 10.1111/j.1365-246X.2006.03009.x.
- U. R. Christensen et A. Tilgner. Power requirement of the geodynamo from ohmic losses in numerical and laboratory dynamos. *Nature*, 429(6988):169–171, 2004. doi: 10.1038/nature02508.
- U. R. Christensen et J. Wicht. Numerical Dynamo Simulations. In P. Olson et G. Schubert, édés, *Core Dynamics*, vol. 8 de *Treatise on Geophysics*, p. 245–282. Elsevier, Amsterdam, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00134-6.
- U. R. Christensen, P. L. Olson, et G. A. Glatzmaier. Numerical modelling of the geodynamo : a systematic parameter study. *Geophys. J. Int.*, 138(2):393–409, 1999. doi: 10.1046/j.1365-246X.1999.00886.x.
- U. R. Christensen, J. Aubert, P. Cardin, E. Dormy, S. Gibbons, G. A. Glatzmaier, E. Grote, Y. Honkura, C. Jones, M. Kono, M. Matsushima, A. Sakuraba, F. Takahashi, A. Tilgner, J. Wicht, et K. Zhang. A numerical dynamo benchmark. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 128 (1-4):25–34, 2001. doi: 10.1016/S0031-9201(01)00275-8.
- U. R. Christensen, J. Aubert, et G. Hulot. Conditions for Earth-like geodynamo models. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 296(3-4):487–496, 2010. doi: 10.1016/j.epsl.2010.06.009.
- C. G. Constable et R. Parker. Statistics of the Geomagnetic Secular Variation for the Past 5 m.y. *J. Geophys. Res.*, 93(B10):11569–11581, 1988. doi: 10.1029/JB093iB10p11569.

- C. G. Constable, L. Tauxe, et R. Parker. Analysis of 11 Myr of geomagnetic intensity variation. *J. Geophys. Res.*, 103(B8):17735–17748, 1998. doi: 10.1029/98JB01519.
- V. Courtillot et J.-L. Le Mouél. Geomagnetic secular variation impulses. *Nature*, 311(5988):709–716, 1984. doi: 10.1038/311709a0.
- V. Courtillot et P. L. Olson. Mantle plumes link magnetic superchrons to phanerozoic mass depletion events. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 260(3-4):495–504, 2007. doi: 10.1016/j.epsl.2007.06.003.
- T. Cowling. The Magnetic Field of Sunspots. *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, 94:39–48, 1933.
- A. Cox. Lengths of Geomagnetic Polarity Intervals. *J. Geophys. Res.*, 73(10):3247–3260, 1968. doi: 10.1029/JB073i010p03247.
- A. Cox. Geomagnetic Reversals. *Science*, 163(3864):237–245, 1969. doi: 10.1126/science.163.3864.237.
- A. De Santis, D. Barraclough, et R. Tozzi. Spatial and temporal spectra of the geomagnetic field and their scaling properties. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 135(2-3):125–134, 2003. doi: 10.1016/S0031-9201(02)00211-X.
- G. de Wijs, G. Kresse, L. Voadlo, D. Dobson, D. Alfe, M. Gillan, et G. Price. The viscosity of liquid iron at the physical conditions of the Earth's core. *Nature*, 392(6678):805–807, 1998. doi: 10.1038/33905.
- E. Dormy. *Modélisation numérique de la dynamo terrestre*. Thèse de doctorat, IPGP, 1997.
- E. Dormy, J.-P. Valet, et V. Courtillot. Numerical models of the geodynamo and observational constraints. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 1(10):1037, 2000. doi: 10.1029/2000GC000062.
- P. E. Driscoll et P. L. Olson. Effects of buoyancy and rotation on the polarity reversal frequency of gravitationally driven numerical dynamos. *Geophys. J. Int.*, 178(3):1337–1350, 2009a. doi: 10.1111/j.1365-246X.2009.04234.x.
- P. E. Driscoll et P. L. Olson. Polarity reversals in geodynamo models with core evolution. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 282(1-4):24–33, 2009b. doi: 10.1016/j.epsl.2009.02.017.
- P. E. Driscoll et P. L. Olson. Superchron cycles driven by variable core heat flow. *Geophys. Res. Lett.*, 38(9):L09304, 2011. doi: 10.1029/2011GL046808.
- A. Dziewonski et D. Anderson. Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25(4):297–356, 1981. doi: 10.1016/0031-9201(81)90046-7.
- A. Dziewonski et F. Gilbert. Solidity of the Inner Core of the Earth inferred from Normal Mode. *Nature*, 234(5330):465–466, Dec 1971. doi: 10.1038/234465a0.
- W. Elsasser. Induction Effects in Terrestrial Magnetism : Part I. Theory. *Phys. Rev.*, 69(3-4):106–116, 1946a. doi: 10.1103/PhysRev.69.106.

- W. Elsasser. Induction Effects in Terrestrial Magnetism : Part II. The Secular Variation. *Phys. Rev.*, 70(3-4):202–212, 1946b. doi: 10.1103/PhysRev.70.202.
- C. C. Finlay. Magnetohydrodynamic Waves. In D. Gubbins et E. Herrero-Bervera, édés, *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*, p. 632–639. Springer, 2007. doi: 10.1007/978-1-4020-4423-6_202.
- C. C. Finlay. Waves in the presence of magnetic fields, rotation and convection. In P. Cardin et L. F. Cugliandolo, édés, *Dynamos*, vol. 88 de *Les Houches Summer School Proceedings*, p. 403–450. Elsevier, 2008. doi: 10.1016/S0924-8099(08)80012-1.
- C. C. Finlay, S. Maus, C. D. Beggan, T. N. Bondar, A. Chambodut, T. A. Chernova, A. Chuliat, V. P. Golovkov, B. Hamilton, M. Hamoudi, R. Holme, G. Hulot, W. Kuang, B. Langlais, V. Lesur, F. J. Lowes, H. Lühr, S. Macmillan, M. Manda, S. McLean, C. Manoj, M. Menvielle, I. Michaelis, N. Olsen, J. Rauberg, M. Rother, T. J. Sabaka, A. Tangborn, L. Tøffner-Clausen, E. Thébaud, A. W. P. Thomson, I. Wardinski, Z. Wei, T. I. Zvereva, et I. A. G. A. Wo. International Geomagnetic Reference Field : the eleventh generation. *Geophys. J. Int.*, 183(3):1216–1230, 2010a. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04804.x.
- C. C. Finlay, S. Maus, M. Hamoudi, F. J. Lowes, N. Olsen, et E. Thébaud. Evaluation of candidate geomagnetic field models for IGRF-11. *Earth Planets Space*, 62(10):787–804, 2010b. doi: 10.5047/eps.2010.11.005.
- A. Fournier, C. Eymin, et T. Alboussière. A case for variational geomagnetic data assimilation : insights from a one-dimensional, nonlinear, and sparsely observed MHD system. *Nonlinear Proc. Geophys.*, 14(2):163–180, 2007. doi: 10.5194/npg-14-163-2007.
- A. Fournier, G. Hulot, D. Jault, W. Kuang, A. Tangborn, N. Gillet, E. Canet, J. Aubert, et F. Lhuillier. An Introduction to Data Assimilation and Predictability in Geomagnetism. *Space Sci. Rev.*, 155:247–291, 2010. doi: 10.1007/s11214-010-9669-4.
- A. Fournier, J. Aubert, et E. Thébaud. Inference on core surface flow from observations and 3-D dynamo modelling. *Geophys. J. Int.*, 186(1):118–136, 2011a. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05037.x.
- A. Fournier, J. Aubert, et E. Thébaud. A proposal for the selection of numerical dynamo models for data assimilation practice. In *EGU General Assembly*, 2011b.
- E. Friis-Christensen, H. Lühr, et G. Hulot. Swarm : A constellation to study the Earth’s magnetic field. *Earth Planets Space*, 58(4):351–358, 2006.
- A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dement’ev, E. Platācis, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, H. Hänel, et G. Will. Detection of a Flow Induced Magnetic Field Eigenmode in the Riga Dynamo Facility. *Phys. Rev. Lett.*, 84(19):4365, 2000. doi: 10.1103/PhysRevLett.84.4365.

- A. Gailitis, O. Lielausis, E. Platacis, S. Dement'ev, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, et G. Will. Magnetic Field Saturation in the Riga Dynamo Experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 86(14):3024, 2001. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.3024.
- Y. Gallet et G. Hulot. Stationary and nonstationary behaviour within the geomagnetic polarity time scale. *Geophys. Res. Lett.*, 24(15):1875–1878, 1997. doi: 10.1029/97GL01819.
- Y. Gallet, A. Genevey, M. L. Goff, N. Warmé, J. Gran-Aymerich, et A. Lefèvre. On the use of archeology in geomagnetism, and vice-versa : Recent developments in archeomagnetism. *C. R. Phys.*, 10(7):630–648, 2009. doi: 10.1016/j.crhy.2009.08.005.
- J. Gee et D. Kent. Source of Oceanic Magnetic Anomalies and the Geomagnetic Polarity Timescale. In M. Kono et G. Schubert, édés, *Geomagnetism*, vol. 5 de *Treatise on Geophysics*, p. 455–507. Elsevier, Amsterdam, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00097-3.
- N. Gillet, D. Jault, E. Canet, et A. Fournier. Fast torsional waves and strong magnetic field within the Earth's core. *Nature*, 465(7294):74–77, 2010a. doi: 10.1038/nature09010.
- N. Gillet, V. Lesur, et N. Olsen. Geomagnetic Core Field Secular Variation Models. *Space Sci. Rev.*, 155:129–145, 2010b. doi: 10.1007/s11214-009-9586-6.
- G. A. Glatzmaier et R. S. Coe. Magnetic Polarity Reversals in the Core. In P. Olson et G. Schubert, édés, *Core Dynamics*, vol. 8 de *Treatise on Geophysics*, p. 283–297. Elsevier, Amsterdam, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00135-8.
- G. A. Glatzmaier et P. H. Roberts. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 91(1-3):63–75, 1995a. doi: 10.1016/0031-9201(95)03049-3.
- G. A. Glatzmaier et P. H. Roberts. A three-dimensional self-consistent computer-simulation of a geomagnetic-field reversal. *Nature*, 377(6546):203–209, 1995b. doi: 10.1038/377203a0.
- G. A. Glatzmaier, R. S. Coe, L. Hongre, et P. H. Roberts. The role of the Earth's mantle in controlling the frequency of geomagnetic reversals. *Nature*, 401(6756):885–890, 1999. doi: 10.1038/44776.
- F. Gradstein, F. Agterberg, J. Ogg, J. Hardenbol, P. van Veen, J. Thierry, et Z. Huang. A Mesozoic time scale. *J. Geophys. Res.*, 99(B12):24051–24074, 1994. doi: 10.1029/94JB01889.
- D. Gubbins et P. H. Roberts. Magnetohydrodynamics of the Earth's core. In J. A. Jacobs, édés, *Geomagnetism*, vol. 2, p. 1–184. Academic Press, 1987.
- R. Holme et N. Olsen. The Spectrum of the Magnetic Secular Variation. In C. Reigber, H. Lühr, P. Schwintzer, et J. Wickert, édés, *Earth Observation with CHAMP*, p. 329–334. Springer, Berlin Heidelberg, 2005. doi: 10.1007/3-540-26800-6_52.

- R. Holme et N. Olsen. Core surface flow modelling from high-resolution secular variation. *Geophys. J. Int.*, 166(2):518–528, 2006. doi: 10.1111/j.1365-246X.2006.03033.x.
- L. Hongre, G. Hulot, et A. Khokhlov. An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 106(3-4):311–335, 1998. doi: 10.1016/S0031-9201(97)00115-5.
- K. Hori, J. Wicht, et U. R. Christensen. The effect of thermal boundary conditions on dynamos driven by internal heating. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 182(1-2):85–97, 2010. doi: 10.1016/j.pepi.2010.06.011.
- G. Hulot et Y. Gallet. Do superchrons occur without any palaeomagnetic warning ? *Earth Planet. Sci. Lett.*, 210(1-2):191–201, 2003. doi: 10.1016/S0012-821X(03)00130-4.
- G. Hulot et J.-L. Le Mouél. A statistical approach to the Earth’s main magnetic field. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 82(3-4):167–183, 1994. doi: 10.1016/0031-9201(94)90070-1.
- G. Hulot, A. Khokhlov, et J.-L. Le Mouél. Uniqueness of mainly dipolar magnetic fields recovered from directional data. *Geophys. J. Int.*, 129(2):347–354, 1997. doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb01587.x.
- G. Hulot, C. Eymin, B. Langlais, M. Manda, et N. Olsen. Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data. *Nature*, 416(6881):620–623, 2002. doi: 10.1038/416620a.
- G. Hulot, N. Olsen, et T. Sabaka. The Present Field. In M. Kono et G. Schubert, édés, *Geomagnetism*, vol. 5 de *Treatise on Geophysics*, p. 33–75. Elsevier, Amsterdam, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00087-0.
- G. Hulot, N. Olsen, E. Thébaud, et K. Hemant. Crustal concealing of small-scale core-field secular variation. *Geophys. J. Int.*, 177(2):361–366, 2009. doi: 10.1111/j.1365-246X.2009.04119.x.
- G. Hulot, C. C. Finlay, C. G. Constable, N. Olsen, et M. Manda. The Magnetic Field of Planet Earth. *Space Sci. Rev.*, 152:159–222, 2010a. doi: 10.1007/s11214-010-9644-0.
- G. Hulot, F. Lhuillier, et J. Aubert. Earth’s dynamo limit of predictability. *Geophys. Res. Lett.*, 37:L06305, 2010b. doi: 10.1029/2009GL041869.
- A. Jackson et C. Finlay. Geomagnetic Secular Variation and Its Applications to the Core. In M. Kono et G. Schubert, édés, *Geomagnetism*, vol. 5 de *Treatise on Geophysics*, p. 147–193. Elsevier, Amsterdam, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00090-0.
- A. Jackson, A. R. T. Jonkers, et M. R. Walker. Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 358(1768):957–990, 2000. doi: 10.1098/rsta.2000.0569.

- J. Jacobs. The Earth's Inner Core. *Nature*, 172(4372):297–298, 1953. doi: 10.1038/172297a0.
- M. Javoy. The integral enstatite chondrite model of the Earth. *Geophys. Res. Lett.*, 22(16):2219–2222, 1995. doi: 10.1029/95GL02015.
- M. Javoy, E. Kaminski, F. Guyot, D. Andrault, C. Sanloup, M. Moreira, S. Labrosse, A. Jambon, P. Agrinier, A. Davaille, et C. Jaupart. The chemical composition of the Earth : Enstatite chondrite models. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 293(3-4):259–268, 2010. doi: 10.1016/j.epsl.2010.02.033.
- H. Jeffreys. The Rigidity of the Earth's Central Core. *Geophys. J. Int.*, 1:371–383, 1926. doi: 10.1111/j.1365-246X.1926.tb05385.x.
- C. Johnson et P. McFadden. Time-Averaged Field and Paleosecular Variation. In M. Kono et G. Schubert, édés, *Geomagnetism*, vol. 5 de *Treatise on Geophysics*, p. 417–453. Elsevier, Amsterdam, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00096-1.
- C. A. Jones. Thermal and Compositional Convection in the Outer Core. In P. Olson et G. Schubert, édés, *Core Dynamics*, vol. 8 de *Treatise on Geophysics*. Elsevier, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00130-9.
- A. Kageyama, T. Sato, R. Horiuchi, T. Hayashi, Y. Todo, T. Watanabe, et H. Takamaru. Computer-simulation of a magnetohydrodynamic dynamo. II. *Phys. Plasmas*, 2(5):1421–1431, 1995. doi: 10.1063/1.871485.
- E. Kalnay. *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-79149-9.
- B. L. N. Kennett et E. R. Engdahl. Travel times for global earthquake location and phase identification. *Geophys. J. Int.*, 105(2):429–465, 1991. doi: 10.1111/j.1365-246X.1991.tb06724.x.
- B. L. N. Kennett, E. R. Engdahl, et R. Buland. Constraints on seismic velocities in the Earth from travel times. *Geophys. J. Int.*, 122(1):108–124, 1995. doi: 10.1111/j.1365-246X.1995.tb03540.x.
- D. Kent et F. Gradstein. A Jurassic to recent chronology. In P. R. Vogt et B. E. Tucholke, édés, *The Geology of North America*, p. 45–50. Geological Society of America, Boulder, 1986.
- A. Khokhlov, G. Hulot, et J. Carlot. Towards a self-consistent approach to palaeomagnetic field modelling. *Geophys. J. Int.*, 145(1):157–171, 2001. doi: 10.1111/j.1365-246X.2001.01386.x.
- A. Khokhlov, G. Hulot, et C. Bouligand. Testing statistical palaeomagnetic field models against directional data affected by measurement errors. *Geophys. J. Int.*, 167(2):635–648, 2006. doi: 10.1111/j.1365-246X.2006.03133.x.
- M. Korte et C. G. Constable. Continuous geomagnetic field models for the past 7 millennia : 2. CALS7K. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 6:Q02H16, 2005. doi: 10.1029/2004GC000801.

- W. Kuang, A. Tangborn, W. Jiang, D. Liu, Z. Sun, J. Bloxham, et Z. Wei. MoSST_DAS : The First Generation Geomagnetic Data Assimilation Framework. *Commun. Comput. Phys.*, 3 (1):85–108, 2008.
- W. Kuang, A. Tangborn, Z. Wei, et T. J. Sabaka. Constraining a numerical geodynamo model with 100 years of surface observations. *Geophys. J. Int.*, 179(3):1458–1468, 2009. doi: 10.1111/j.1365-246X.2009.04376.x.
- W. Kuang, Z. Wei, R. Holme, et A. Tangborn. Prediction of geomagnetic field with data assimilation : a candidate secular variation model for IGRF-11. *Earth Planets Space*, 62(10):775–785, 2010. doi: 10.5047/eps.2010.07.008.
- C. Kutzner et U. R. Christensen. From stable dipolar towards reversing numerical dynamos. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 131(1):29–45, 2002. doi: 10.1016/S0031-9201(02)00016-X.
- C. Kutzner et U. R. Christensen. Simulated geomagnetic reversals and preferred virtual geomagnetic pole paths. *Geophys. J. Int.*, 157(3):1105–1118, 2004. doi: 10.1111/j.1365-246X.2004.02309.x.
- C. Laj et J. Channell. Geomagnetic Excursions. In M. Kono et G. Schubert, édés, *Geomagnetism*, vol. 5 de *Treatise on Geophysics*, p. 373–416. Elsevier, Amsterdam, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00095-X.
- R. Langel. The main field. In J. A. Jacobs, édés, *Geomagnetism*, vol. 1, p. 249–512. Academic Press, London, 1987.
- R. A. Langel et R. H. Estes. A geomagnetic field spectrum. *Geophys. Res. Lett.*, 9(4):250–253, 1982. doi: 10.1029/GL009i004p00250.
- J. Larmor. How the Sun might have become a Magnet ? *The Electrical Review*, 85(2):412, 1919.
- J.-L. Le Mouél. Le champ géomagnétique. In J. Coulomb et G. Jobert, édés, *Traité de géophysique interne*, vol. 2, p. 9–67. Masson, 1976.
- B. Lehnert. Magnetohydrodynamic waves under the action of the Coriolis force. *Astrophys. J.*, 119(3):647–654, 1954. doi: 10.1086/145869.
- C. Leith. Numerical simulation of the Earth’s atmosphere. In *Methods in Computational Physics*, vol. 4, p. 1–28. New-York Academic Press, 1965.
- V. Lesur, I. Wardinski, M. Rother, et M. Manda. GRIMM : The GFZ reference internal magnetic model based on vector satellite and observatory data. *Geophys. J. Int.*, 173(2):382–394, 2008. doi: 10.1111/j.1365-246X.2008.03724.x.
- V. Lesur, I. Wardinski, M. Hamoudi, et M. Rother. The second generation of the GFZ Reference Internal Magnetic Model : GRIMM-2. *Earth Planets Space*, 62(765-773), 2010. doi: 10.5047/eps.2010.07.007.

- V. Lesur, N. Olsen, et A. W. Thomson. Geomagnetic Core Field Models in the Satellite Era. In B. Hultqvist, M. Manda, et M. Korte, édés, *Geomagnetic Observations and Models*, vol. 5 de *IAGA Special Sopron Book Series*, p. 277–294. Springer, Netherlands, 2011. doi: 10.1007/978-90-481-9858-0_11.
- F. Lhuillier, A. Fournier, G. Hulot, et J. Aubert. The geomagnetic secular-variation timescale in observations and numerical dynamo models. *Geophys. Res. Lett.*, 38(9):L09306, 2011. doi: 10.1029/2011GL047356.
- J. Lister. Expressions for the dissipation driven by convection in the Earth’s core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 140(1-3):145–158, 2003. doi: 10.1016/j.pepi.2003.07.007.
- D. Liu, A. Tangborn, et W. Kuang. Observing system simulation experiments in geomagnetic data assimilation. *J. Geophys. Res.*, 112(B8), 2007. doi: 10.1029/2006JB004691.
- E. Lorenz. Predictability of hydrodynamic flow. *Trans. New York Acad. Sci.*, 25(4):409–432, 1963a.
- E. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.*, 20(2):130–141, 1963b. doi: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130 :DNF>2.0.CO ;2.
- E. Lorenz. A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus*, 17(3):321–333, 1965. doi: 10.1111/j.2153-3490.1965.tb01424.x.
- E. N. Lorenz. Predictability – a problem partly solved. In T. Palmer et R. Hagedorn, édés, *Predictability of weather and climate*. Cambridge University Press, 2006. ISBN 0521848822.
- F. J. Lowes. Mean-Square Values on Sphere of Spherical Harmonic Vector Fields. *J. Geophys. Res.*, 71(8):2179, 1966. doi: 10.1029/JZ071i008p02179.
- F. J. Lowes. Spatial Power Spectrum of the Main Geomagnetic Field, and Extrapolation to the Core. *Geophys. J.R. Astron. Soc.*, 36(3):717–730, 1974. doi: 10.1111/j.1365-246X.1974.tb00622.x.
- W. Lowrie et D. V. Kent. Geomagnetic Polarity Timescales and Reversal Frequency Regimes. In J. E. T. Channell, édés, *Timescales of the Paleomagnetic Field*, vol. 145 de *Geophysical Monograph Series*, p. 117–129. AGU, 2004. ISBN 9780875904108.
- O. Lucke. Über Mittelwerte von Energiedichten der Kraftfelder. *Wissenschaftlich Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule Potsdam*, 3(1):19–46, 1957.
- S. Macmillan, S. Maus, T. N. Bondar, A. Chambodut, V. P. Golovkov, R. Holme, B. Langlais, V. Lesur, F. J. Lowes, H. Lühr, W. Mai, M. Manda, N. Olsen, M. Rother, T. J. Sabaka, A. W. P. Thomson, I. Wardinski, et I. A. G. Aeronomy. The 9th-Generation International Geomagnetic Reference Field. *Geophys. J. Int.*, 155(3):1051–1056, 2003. doi: 10.1111/j.1365-246X.2003.02102.x.

- P. Mauersberger. Das Mittel der Energiedichte des geomagnetischen Hauptfeldes an der Erdoberfläche und seine säkulare Änderung. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, 65:207–215, 1956.
- S. Maus, L. Silva, et G. Hulot. Can core-surface flow models be used to improve the forecast of the Earth's main magnetic field? *J. Geophys. Res.*, 113:B08102, 2008. doi: 10.1029/2007JB005199.
- S. Maus, C. Manoj, J. Rauberg, I. Michaelis, et H. Lühr. NOAA/NGDC candidate models for the 11th generation International Geomagnetic Reference Field and the concurrent release of the 6th generation Pomme magnetic model. *Earth Planets Space*, 62(10):729–735, 2010. doi: 10.5047/eps.2010.07.006.
- P. McFadden. Statistical Tools for the Analysis of Geomagnetic Reversal Sequences. *J. Geophys. Res.*, 89(B5):3363–3372, 1984. doi: 10.1029/JB089iB05p03363.
- P. McFadden et R. Merrill. Lower Mantle Convection and Geomagnetism. *J. Geophys. Res.*, 89 (NB5):3354–3362, 1984. doi: 10.1029/JB089iB05p03354.
- P. McFadden et R. Merrill. Evolution of the geomagnetic reversal rate since 160 Ma : Is the process continuous? *J. Geophys. Res.*, 105(B12):28455–28460, 2000. doi: 10.1029/2000JB900258.
- R. Merrill, M. McElhinny, et P. McFadden. *The magnetic field of the Earth : paleomagnetism, the core, and the deep mantle*, vol. 63 de *International Geophysics Series*. Academic Press, 1996. ISBN 012491246X.
- J. Meyer. Remark on the Secular Change in the Energy Density Spectrum of the Geomagnetic Field. *J. Geomagn. Geoelec.*, 38(2):165–169, 1986.
- Y. Mintz. Very long-term global integration of the primitive equations of atmospheric motion. In *WMO/IUGG Symposium on Research and Development Aspects of Long-Range Forecasting*, *WMO Tech. Note*, vol. 66, p. 141–167, 1964.
- J.-P. Montagner. Deep Earth Structure - Upper Mantle Structure : Global Isotropic and Anisotropic Elastic Tomography. In A. M. Dziewonski, B. A. Romanowicz, et G. Schubert, édés, *Seismology and the Structure of the Earth*, vol. 1 de *Treatise on Geophysics*, p. 559–589. Elsevier, Amsterdam, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00018-3.
- P. Naidu. Statistical Structure of Geomagnetic Field Reversals. *J. Geophys. Res.*, 76(11):2649–2662, 1971. doi: 10.1029/JB076i011p02649.
- H. Nevanlinna. Notes on Global Mean-Square Values of the Geomagnetic Field and Secular Variation. *J. Geomagn. Geoelec.*, 39(3):165–174, 1987.
- R. D. Oldham. The Constitution of the Interior of the Earth, as Revealed by Earthquakes. *Q. J. Geol. Soc.*, 62(1-4):456–475, 1906. doi: 10.1144/GSL.JGS.1906.062.01-04.21.

- N. Olsen, H. Lühr, T. J. Sabaka, M. Manda, M. Rother, L. Tøffner-Clausen, et S. Choi. CHAOS-a model of the Earth's magnetic field derived from CHAMP, Ørsted, and SAC-C magnetic satellite data. *Geophys. J. Int.*, 166(1):67–75, 2006. doi: 10.1111/j.1365-246X.2006.02959.x.
- N. Olsen, M. Manda, T. J. Sabaka, et L. Tøffner-Clausen. The CHAOS-3 geomagnetic field model and candidates for the 11th generation IGRF. *Earth Planets Space*, 62(10):719–727, 2010. doi: 10.5047/eps.2010.07.003.
- P. L. Olson. Gravitational dynamos and the low-frequency geomagnetic secular variation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 104(51):20160–20166, 2007. doi: 10.1073/pnas.0709081104.
- P. L. Olson et H. Amit. Changes in earth's dipole. *Naturwissenschaften*, 93(11):519–542, 2006. doi: 10.1007/s00114-006-0138-6.
- P. L. Olson et U. R. Christensen. The time-averaged magnetic field in numerical dynamos with non-uniform boundary heat flow. *Geophys. J. Int.*, 151(3):809–823, 2002. doi: 10.1046/j.1365-246X.2002.01818.x.
- P. L. Olson et U. R. Christensen. Dipole moment scaling for convection-driven planetary dynamos. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 250(3-4):561–571, 2006. doi: 10.1016/j.epsl.2006.08.008.
- P. L. Olson, P. E. Driscoll, et H. Amit. Dipole collapse and reversal precursors in a numerical dynamo. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 173:121–140, 2009. doi: 10.1016/j.pepi.2008.11.010.
- P. L. Olson, R. S. Coe, P. E. Driscoll, G. A. Glatzmaier, et P. H. Roberts. Geodynamo reversal frequency and heterogeneous core-mantle boundary heat flow. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 180(1-2):66–79, 2010. doi: 10.1016/j.pepi.2010.02.010.
- P. L. Olson, G. A. Glatzmaier, et R. S. Coe. Complex polarity reversals in a geodynamo model. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 304(1-2):168 – 179, 2011. doi: 10.1016/j.epsl.2011.01.031.
- V. Pavlov et Y. Gallet. A third superchron during the Early Paleozoic. *Episodes*, 28(2):78–84, 2005.
- J. Phillips. Time Variation and Asymmetry in the Statistics of Geomagnetic Reversal Sequences. *J. Geophys. Res.*, 82(5):835–843, 1977. doi: 10.1029/JB082i005p00835.
- J.-P. Poirier. Light elements in the Earth's outer core : A critical review. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 85(3-4):319–337, 1994. doi: 10.1016/0031-9201(94)90120-1.
- T. J. Sabaka, N. Olsen, et R. A. Langel. A comprehensive model of the quiet-time, near-Earth magnetic field : phase 3. *Geophys. J. Int.*, 151(1):32–68, 2002. doi: 10.1046/j.1365-246X.2002.01774.x.
- T. J. Sabaka, N. Olsen, et M. Purucker. Extending comprehensive models of the Earth's magnetic field with Ørsted and CHAMP data. *Geophys. J. Int.*, 159(2):521–547, 2004. doi: 10.1111/j.1365-246X.2004.02421.x.

- R. Secco et H. Schloessin. The electrical resistivity of solid and liquid Fe at pressures up to 7 GPa. *J. Geophys. Res.*, 94(B5):5887–5894, 1989. doi: 10.1029/JB094iB05p05887.
- L. Silva, S. Maus, G. Hulot, et E. Thébault. On the possibility of extending the IGRF predictive secular model to a higher SH degree. *Earth Planets Space*, 62(10):815–820, 2010. doi: 10.5047/eps.2010.07.005.
- A. Simmons, R. Mureau, et T. Petroliaigis. Error growth and estimates of predictability from the ECMWF forecasting system. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 121:1739–1771, 1995. doi: 10.1002/qj.49712152711.
- J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Wea. Rev.*, 91(3):99–164, 1963. doi: 10.1175/1520-0493(1963)091<0099 :GCEWTP>2.3.CO ;2.
- J. Smagorinsky. Problems and promises of deterministic extended range forecasting. *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 50:286–311, 1969.
- F. Stacey. *Physics of the Earth*. Brookfield Press, 3rd édn, 1992. ISBN 0-646-09091-7.
- F. Stacey et P. Davis. *Physics of the Earth*. Cambridge University Press, 4th édn, 2008. ISBN 978-0-521-87362-8.
- F. D. Stacey et D. E. Loper. A revised estimate of the conductivity of iron alloy at high pressure and implications for the core energy balance. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 161(1-2):13–18, 2007. doi: 10.1016/j.pepi.2006.12.001.
- R. Stieglitz et U. Müller. Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids*, 13(3):561–564, 2001. doi: 10.1063/1.1331315.
- F. Takahashi, M. Matsushima, et Y. Honkura. A numerical study on magnetic polarity transition in an MHD dynamo model. *Earth Planets Space*, 59(7):665–673, 2007.
- F. Takahashi, H. Tsunakawa, M. Matsushima, N. Mochizuki, et Y. Honkura. Effects of thermally heterogeneous structure in the lowermost mantle on the geomagnetic field strength. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 272(3-4):738–746, 2008. doi: 10.1016/j.epsl.2008.06.017.
- A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005. ISBN 978-0-898715-72-9.
- L. Tauxe. Long-term trends in paleointensity : The contribution of DSDP/ODP submarine basaltic glass collections. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 156(3-4):223–241, 2006. doi: 10.1016/j.pepi.2005.03.022.
- L. Tauxe et P. Hartl. 11 million years of Oligocene geomagnetic field behaviour. *Geophys. J. Int.*, 128(1):217–229, 1997. doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb04082.x.

- L. Tauxe et T. Yamazaki. Paleointensities. In M. Kono et G. Schubert, édés, *Geomagnetism*, vol. 5 de *Treatise on Geophysics*, p. 509–563. Elsevier, Amsterdam, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00098-5.
- A. Tilgner. Rotational Dynamics of the Core. In P. Olson et G. Schubert, édés, *Core Dynamics*, vol. 8 de *Treatise on Geophysics*, p. 207–243. Elsevier, Amsterdam, 2007. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00129-2.
- J.-P. Valet. Time variations in geomagnetic intensity. *Rev. Geophys.*, 41(1):1004, Apr 2003. doi: 10.1029/2001RG000104.
- J.-P. Valet, L. Meynadier, et Y. Guyodo. Geomagnetic dipole strength and reversal rate over the past two million years. *Nature*, 435(7043):802–805, 2005. doi: 10.1038/nature03674.
- J. Wicht. Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 132(4):281–302, 2002. doi: 10.1016/S0031-9201(02)00078-X.
- J. Wicht. Palaeomagnetic interpretation of dynamo simulations. *Geophys. J. Int.*, 162(2):371–380, 2005. doi: 10.1111/j.1365-246X.2005.02665.x.
- J. Wicht et P. L. Olson. A detailed study of the polarity reversal mechanism in a numerical dynamo model. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 5(3), 2004. doi: 10.1029/2003GC000602.
- J. Wicht, S. Stellmach, et H. Harder. Numerical Models of the Geodynamo : From Fundamental Cartesian Models to 3D Simulations of Field Reversals. In K.-H. Glaßmeier, H. Soffel, et J. F. Negendank, édés, *Geomagnetic Field Variations*, Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics, p. 107–158. Springer, Berlin Heidelberg, 2009. doi: 10.1007/978-3-540-76939-2_4.
- J. Wicht, S. Stellmach, et H. Harder. Numerical Dynamo Simulations : From Basic Concepts to Realistic Models. In W. Freeden, M. Z. Nashed, et T. Sonar, édés, *Handbook of Geomathematics*, p. 459–502. Springer, Berlin Heidelberg, 2010. doi: 10.1007/978-3-642-01546-5_16.

Annexe A

Lettre sur le temps caractéristique de la variation séculaire

The geomagnetic secular-variation timescale in observations and numerical dynamo models

Florian Lhuillier,¹ Alexandre Fournier,¹ Gauthier Hulot,¹ and Julien Aubert¹

Received 3 March 2011; accepted 29 March 2011; published 5 May 2011.

[1] The knowledge of the spatial power spectra of the main geomagnetic field and of its secular variation makes it possible to define typical timescales τ_n for each spherical harmonic degree n . Investigating both observations and numerical dynamos, we show that a one-parameter law of the form $\tau_n = \tau_{SV}/n$ is satisfied for the non-dipole field, given the statistical way the observed τ_n are expected to fluctuate. Consequently, we determine the corresponding secular-variation timescale τ_{SV} from either instantaneous or time-averaged spectra, leading to a value of $415 \pm_{45}^{55}$ yr for recent satellite field models. In the broader context of geomagnetic data assimilation, τ_{SV} could provide a sensible and convenient means to rescale the time axis of dynamo simulations. **Citation:** Lhuillier, F., A. Fournier, G. Hulot, and J. Aubert (2011), The geomagnetic secular-variation timescale in observations and numerical dynamo models, *Geophys. Res. Lett.*, 38, L09306, doi:10.1029/2011GL047356.

1. Introduction

[2] Considering the main magnetic field at the Earth's surface, it is possible to define the mean square field due to all spherical harmonic terms of degree n [Mauersberger, 1956; Lowes, 1966],

$$R_n = (n+1) \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right], \quad (1)$$

where $\{g_n^m, h_n^m\}$ are the Gauss coefficients of spherical harmonic degree n and order m normalised according to the convention of Schmidt.

[3] Analogous quantities can also be defined for the rate of change of the field [Lowes, 1974],

$$Q_n = (n+1) \sum_{m=0}^n \left[(\dot{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m)^2 \right], \quad (2)$$

where $\{\dot{g}_n^m, \dot{h}_n^m\}$ are the time derivatives of the Gauss coefficients. The graphical representations of R_n and Q_n as a function of n are known as the spatial power spectra of the field and of its secular variation.

[4] For each spherical harmonic degree n , it is then possible to define the following timescales [Stacey, 1992, p. 355],

$$\tau_n = \sqrt{\frac{R_n}{Q_n}} = \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^n \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right]}{\sum_{m=0}^n \left[(\dot{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m)^2 \right]}}, \quad (3)$$

which characterise the dynamics of the main field, independently of the distance from which it is observed. They are defined here in terms of instantaneous values, but a definition based on averaged values,

$$\tau_n = \sqrt{\frac{\langle R_n \rangle}{\langle Q_n \rangle}}, \quad (4)$$

where the brackets $\langle \rangle$ denote time averaging, has also been used [Christensen and Tilgner, 2004]. Several ways of interpreting these timescales have been proposed. In particular they can be interpreted as *reorganisation times* [Stacey, 1992], in which case they are given a phenomenological interpretation. They can also be interpreted as *correlation times* [Hulot and Le Mouél, 1994], in which case they are given a statistical interpretation. They measure how long it would take for the field at spherical harmonic degree n to be completely renewed.

[5] These timescales are known to decrease with increasing spherical harmonic degree n , but the exact dependence of τ_n with respect to n is still a matter of debate. A two-parameter law of the form $\tau_n = \delta \times n^{-\gamma}$ has on the one hand been assumed for recent satellite data [Holme and Olsen, 2006; Olsen et al., 2006; Lesur et al., 2008; Hulot et al., 2010a], where the least-squares estimate of the exponent γ varies between 1.32 and 1.45, depending on the epoch and the range of spherical harmonic degrees considered for the fit. A simpler one-parameter law of the form $\tau_n = \tau_{SV}/n$ has on the other hand been proposed for dynamo solutions [Christensen and Tilgner, 2004], where τ_{SV} is the so-called secular-variation timescale.

[6] In this letter, we test the relevance of the simpler one-parameter law, investigating both observations and numerical dynamos. We explore to what extent such an inverse linear law is acceptable given the way the observed τ_n are expected to fluctuate, and discuss why this one-parameter law can be satisfactorily used in contrast to a more general two-parameter power law. We finally contemplate the possibility of using the secular-variation timescale as a means to rescale the time axis of dynamo simulations, in the prospect of comparing numerical predictions with data.

2. Method

[7] To address the above questions, one needs to resort to a statistical description of the geomagnetic field. One such description is provided by the stationary isotropic statistical (SIS) model of the geomagnetic field proposed by Hulot and Le Mouél [1994]. It assumes that the set $\{g_n^m, h_n^m\}$ consists of independent stationary Gaussian processes with zero mean and variance σ_n^2 . Under this assumption, the time derivatives

¹Institut de Physique du Globe de Paris, Sorbonne Paris Cité, Université Paris Diderot, INSU/CNRS, UMR 7154, Paris, France.

$\{g_n^m, h_n^m\}$ are also a set of independent stationary Gaussian processes with zero mean and some variance σ_n^2 . Within this statistical framework, the mathematical expectations of R_n and Q_n are respectively $\bar{R}_n = (n+1)(2n+1)\sigma_n^2$ and $\bar{Q}_n = (n+1)(2n+1)\sigma_n'^2$. As shown by *Hulot and Le Mouél* [1994], it entails that the quantities $X_n = (2n+1)R_n/\bar{R}_n$ and $Y_n = (2n+1)Q_n/\bar{Q}_n$ both follow χ^2 -distributions with $(2n+1)$ degrees of freedom, and that the ratio X_n/Y_n follows a F -distribution with $(2n+1, 2n+1)$ degrees of freedom [von *Storch and Zwiers*, 2001, section 2.7.10]. Another expression of the ratio X_n/Y_n is $(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$, where $\bar{\tau}_n = (\bar{R}_n/\bar{Q}_n)^{1/2}$. It implies that τ_n is expected to fluctuate about $\bar{\tau}_n$ in such a way that $(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$ follows a F -distribution with $(2n+1, 2n+1)$ degrees of freedom, whose probability density function (pdf) will be denoted hereinafter by $F^{2n+1, 2n+1}$. When working on averaged quantities as defined in equation (4), this formalism must be modified to account for the increase in the number of degrees of freedom, since two contiguous values of a Gauss coefficient of degree n are expected to become statistically independent after approximately $3 \cdot \bar{\tau}_n$ [Hongre *et al.*, 1998]. If T denotes the width of the temporal window over which the secular variation is studied, the number of independent Gauss coefficients defining $\langle R_n \rangle$ and $\langle Q_n \rangle$ is multiplied by $N_n = T/(3 \cdot \bar{\tau}_n)$ (rounded to the nearest larger integer), and the ratio $(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$ consequently follows a F -distribution with $((2n+1)N_n, (2n+1)N_n)$ degrees of freedom.

[8] Let us now consider the two models we wish to test for $\bar{\tau}_n$, and the associated forward modelling relationships linking the parameter space $\mathcal{M}$ to the data space $\mathcal{O} = \{\tau_n^{\text{obs}}\}_{n=N_0}^N$, where the τ_n^{obs} are the correlation times observed from spherical harmonic degree $n = N_0$ to N . In the case of the one-parameter inverse linear law, $\mathcal{M} = \{\tau_{\text{SV}}\}$ and the forward modelling relationship is $\bar{\tau}_n = \tau_{\text{SV}}/n$. In the case of the two-parameter power law, $\mathcal{M} = \{\delta, \gamma\}$ and the forward modelling relationship is $\bar{\tau}_n = \delta \times n^{-\gamma}$. No prior information is assumed on either $\mathcal{M}$. According to the SIS model, observations consisting of instantaneous correlations times (based on instantaneous spectra, and defined in equation (3)) are expected to follow a distribution described by the probability

$$g_{\text{obs}}\left(\{\tau_n^{\text{obs}}\}_{n=N_0}^N\right) = \prod_{n=N_0}^N F^{2n+1, 2n+1} \left[\left(\frac{\tau_n^{\text{obs}}}{\bar{\tau}_n} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

We now seek best estimates of either τ_{SV} or (δ, γ) such that, for each degree n , the observation τ_n^{obs} is consistent with the $F^{2n+1, 2n+1}$ -distribution we expect $(\tau_n^{\text{obs}}/\bar{\tau}_n)^2$ to follow. Note that, since each pdf $F^{2n+1, 2n+1}(x)$ is skewed (see Figure 2), the median $x = 1$ differs from the likeliest value $x = \chi_{2n+1}$, where $\chi_K = (K-2)/(K+2)$. Searching for the parameters, which characterise $\bar{\tau}_n$ by maximising the probability defined by equation (5), would thus lead to a biased estimator, achieving a best fit of $\bar{\tau}_n$ to $\tau_n^{\text{obs}}/\sqrt{\chi_{2n+1}}$ rather than to τ_n^{obs} . A rigorous treatment of this issue could involve procedures such as a uniformisation of the statistics [see, e.g., *Khokhlov et al.*, 2001]. We however prefer to adopt a simpler approximate way to proceed, and rescale τ_n^{obs} by a factor $\sqrt{\chi_{2n+1}}$ before seeking the parameters that maximise the correspondingly rescaled probability. The

robustness of this procedure was checked using synthetic data (not shown). We accordingly resort to the probability

$$f(\tau_{\text{SV}}) = \frac{1}{\nu} \prod_{n=N_0}^N F^{2n+1, 2n+1} \left[\chi_{2n+1} \left(\frac{\tau_n^{\text{obs}}}{\tau_{\text{SV}}} \right)^2 \right] \quad (6)$$

to estimate τ_{SV} in the one-parameter case, and

$$f(\delta, \gamma) = \frac{1}{\nu} \prod_{n=N_0}^N F^{2n+1, 2n+1} \left[\chi_{2n+1} \left(\frac{\tau_n^{\text{obs}}}{\delta \times n^{-\gamma}} \right)^2 \right] \quad (7)$$

to estimate δ and γ in the two-parameter case, where ν is a normalisation factor in both equations. If we consider “time-averaged” correlation times (based on time-averaged spectra, and defined in equation (4)) instead of instantaneous ones, the line of reasoning remains the same, provided that $F^{2n+1, 2n+1}$ and χ_{2n+1} are respectively changed to $F^{(2n+1)N_n, (2n+1)N_n}$ and $\chi_{(2n+1)N_n}$, for the reasons outlined above. Using equation (6), the maximum of likelihood of τ_{SV} , denoted by $\tau_{\text{SV}}^{\text{max}}$, can then be deduced along with its 90% confidence interval for both observations and numerical dynamos. In addition, equation (7) allows us to map the two-dimensional pdf of (δ, γ) , thereby making it possible to assess the robustness of the inverse linear law against the more general two-parameter power law.

3. Secular-Variation Timescale in Geomagnetic Field Models

[9] In this section we consider historical and contemporary core field models. We restrict our attention to the “observatory” part of *gufm1* [Jackson *et al.*, 2000], to wit the period 1840–1990. We prefer not to use the model for earlier epochs because the correlation times for the higher degrees ($n \geq 5$) are more heavily affected by the temporal regularisation. We also consider the short-term satellite models POMME-6 [Maus *et al.*, 2010], GRIMM-2 [Lesur *et al.*, 2010] and CHAOS-3 [Olsen *et al.*, 2010], all of which contributed to the elaboration of the IGRF-11 [Finlay *et al.*, 2010].

[10] We first consider the relevance of the one-parameter inverse linear law $\bar{\tau}_n = \tau_{\text{SV}}/n$. Because of a large non-zero averaged value of the axial dipole g_1^0 [see, e.g., *Hulot et al.*, 2010a], which violates the SIS assumption, we discard τ_1^{obs} and rely on values of τ_n^{obs} computed from equation (3) for $n = 2 - 13$ (resp. from equation (4) for $n = 2 - 10$) for the short-term satellite models (resp. for *gufm1*). The upper bound value of $n = 13$ for recent satellite models was chosen because of the remarkable agreement of Q_n for these recent field models up to that degree, and because crustal contamination makes the $n > 13$ part of R_n irrelevant for this study [see e.g., *Hulot et al.*, 2010a]. Table 1 presents the recovered values of $\tau_{\text{SV}}^{\text{max}}$ with their 90% confidence interval, based on equation (6). Note the good agreement amongst the satellite models. The historical model *gufm1* leads to different values of τ_{SV} , which are nevertheless consistent with the expected uncertainties.

[11] Figure 1 presents the observed correlation times τ_n^{obs} (black stars) with their corresponding fits (red lines) for CHAOS-3 (Figure 1a) and *gufm1* (Figure 1b). To check the

L09306

LHUILIER ET AL.: GEOMAGNETIC SECULAR-VARIATION TIMESCALE

L09306

Table 1. Values of $\tau_{SV}^{\max}$ With Their 90% Confidence Interval for Various Geomagnetic Field and Dynamo Models When Computing τ_n^{obs} Either From Equation (3) or From Equation (4)^a

Model	Equation	n	$\tau_{SV}^{\max}$	τ_{SV}
CHAOS-3 2005	3	2–13	[378; 425 ; 483]	445
GRIMM-2 2005	3	2–13	[361; 406 ; 461]	446
POMME-6 2005	3	2–13	[368; 413 ; 470]	443
<i>gufm1</i> 1840–1990	4	2–10	[423; 489 ; 579]	388
dynamo model	3	2–13	[0.129; 0.146 ; 0.164]	0.136
dynamo model	4	2–13	[0.137; 0.140 ; 0.143]	0.140

^aValues for the geomagnetic field models are expressed in years, whereas those for the dynamo model are in units of the viscous diffusion time. The last column indicates the values of τ_{SV} recovered from a standard least-squares algorithm. Values in bold are $\tau_{SV}^{\max}$, and values in brackets are their 90% confidence interval.

compliance of the inferred law $\bar{\tau}_n = \tau_{SV}^{\max}/n$ with the τ_n^{obs} , Figure 1 also presents 90% statistical dispersion bars, deduced from the $F^{2n+1,2n+1}$ -pdf for $(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$, in agreement with the SIS model. Note that for this a posteriori check, the exact (and not the rescaled) $F^{2n+1,2n+1}$ are used, as our goal

is no longer to search for an optimal τ_{SV} , but instead to verify the compatibility of the observations with their expected statistics. Note also that in the case of *gufm1*, the factor N_n introduced above is always equal to one, which led us to resort to $F^{2n+1,2n+1}$ -pdfs, even though we computed “time-averaged” values of τ_n^{obs} using equation (4). We obtain that the observations (black stars) are all located within the 90% statistical dispersion bars, confirming the compatibility of the inverse linear law $\tau_{SV}^{\max}/n$ with the observed geomagnetic field, within the statistical framework we used.

[12] Let us now consider the relevance of the more general two-parameter power law $\bar{\tau}_n = \delta \times n^{-\gamma}$. In order to assess which sets of values (δ, γ) can possibly provide a better fit to the data, we rely on equation (7) to compute $f(\delta, \gamma)$. Figures 1e and 1f show these pdfs (normalised by their maximum, and hereinafter denoted by f), obtained for CHAOS-3 and *gufm1*, respectively. Figures 1e and 1f reveal crescent-shaped $f > 0.8$ surfaces (in red) which intersect the $\gamma = 1$ axis. Therefore, even if particular values of (δ, γ) can provide a better fit to the data than $(\delta, \gamma) = (\tau_{SV}, 1)$, this improvement is marginal, and not statistically significant.

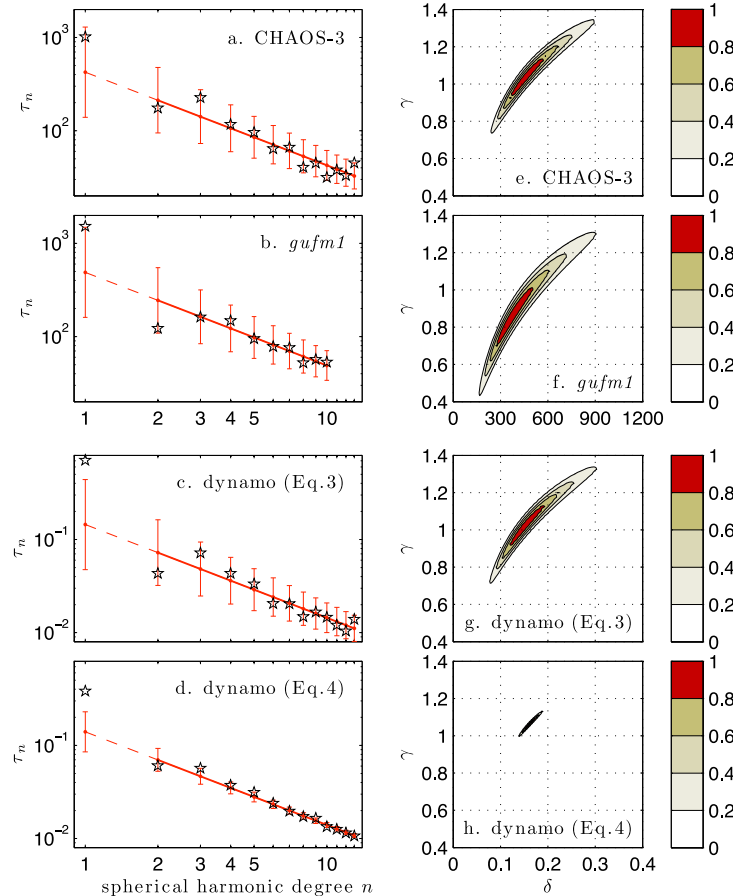


Figure 1. Correlation times τ_n^{obs} (black stars) and corresponding fits (in red) computed for: (a) the epoch 2005 of CHAOS-3 (using equation (3)); (b) the period 1840–1990 of *gufm1* (using equation (4)); (c) some arbitrary epoch in our dynamo run (using equation (3)); (d) a period of $10 \cdot \tau_{SV}$ in our dynamo run (using equation (4)). The fits are presented here with a 90% statistical dispersion bar deduced from the $F^{(2n+1)N_n, (2n+1)N_n}$ -pdf for $(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$, where $N_n = 1$ for Figures 1a–1c. (e–h) The probability density of the two parameters (δ, γ) (normalised by its maximum) for the four cases described in Figures 1a–1d.

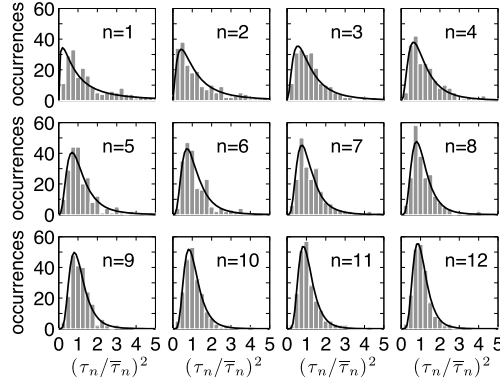


Figure 2. Empirical pdfs of $(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$ for 200 independent τ_n -values of our dynamo run (gray bars). The expected $F^{2n+1, 2n+1}$ -pdfs (black lines) are also shown to check the compliance with the SIS model.

These results are in agreement with the compatibility of an inverse linear law with the data demonstrated in the previous paragraph.

4. Secular-Variation Timescale in Numerical Dynamo Models

[13] Using the code PARODY-JA described by *Aubert et al.* [2008], we now confine our attention to a numerical dynamo driven by compositional convection, which is characterised by the four control parameters $E = 10^{-3}$, $Ra^* = 5$, $Pr = 1$, $Pm = 10$ (following the conventions of *Christensen and Aubert* [2006]) and operates with a lateral resolution of 64 spherical harmonic degrees. With a magnetic Ekman number $E_\eta = 10^{-4}$ and a magnetic Reynolds number $Rm = 232$, our dynamo model is located in the “Earth-like” zone of *Christensen et al.* [2010, Figure 7]. We use this dynamo for illustrative purposes but checked that the results are also applicable to other dynamo solutions, provided that $Rm \gtrsim 100$. In the results discussed in this section, time is expressed in units of the viscous diffusion time.

[14] For comparison with results obtained with geomagnetic field models, we first consider sets of instantaneous correlation times τ_n (computed from equation (3)), and carry out fits for $n = 2 - 13$. Fitting parameters are reported in Table 1 for one typical set of instantaneous values of τ_n^{obs} , and Figure 1c shows the corresponding plot. Figure 1c shows that for $n = 2 - 13$, each τ_n^{obs} falls within the 90% statistical dispersion bars, confirming that a one-parameter law of the form τ_{SV}/n is also compatible with this simulated field. Note in addition that τ_1^{obs} now clearly falls out of the statistical dispersion bars.

[15] Since this simulation was integrated for the equivalent of $1000 \cdot \tau_{\text{SV}}$ (based on the τ_{SV} we just estimated), it also makes it possible to check that instantaneous values of τ_n fluctuate as predicted by the SIS model. To this end, we compute τ_n from equation (3) every $\Delta t = 5 \cdot \tau_{\text{SV}}$ (to conservatively ensure the statistical independence of the resulting 200 values of τ_n), and estimate $\bar{\tau}_n$ from equation (4) using spectra averaged over the entire duration of the run. Figure 2 shows the empirical pdfs of $(\tau_n/\bar{\tau}_n)^2$ for comparison with the expected $F^{2n+1, 2n+1}$ -pdfs. Figure 2 confirms the rel-

evance of the SIS model for this study, at the noticeable and expected exception of the dipole field, whose non-zero averaged value violates the SIS assumption and leads to a biased distribution of the values of τ_1 .

[16] Fits based on τ_n^{obs} computed for a period $T \approx 10 \cdot \tau_{\text{SV}}$ with the help of equation (4) are also of interest, since they make it possible to check the robustness of our approach when long-term averaged, instead of instantaneous, spectra are considered. Fitting parameters are reported in Table 1 for one such typical set of τ_n^{obs} , and Figure 1d presents the corresponding plot. Figure 1d shows that for each degree n , τ_n^{obs} falls within or very close to the 90% statistical dispersion bars, which are smaller than previously, due to the impact of time averaging on the number of degrees of freedom (recall Section 2). Interestingly, we also note that τ_{SV} is estimated with a much smaller confidence interval, entirely included within the confidence interval previously recovered from instantaneous spectra.

[17] Figures 1g and 1h show the two-dimensional pdfs (normalised by their maximum, and still denoted by f) obtained for a two-parameter power law (using equation (7)), for instantaneous and time-averaged spectra, respectively. In the instantaneous case (Figure 1g), and as found for geomagnetic field models, the $\gamma = 1$ axis intersects the $f > 0.8$ surface, confirming the lack of need to resort to a two-parameter power law to account for the observations. The time-averaged case (Figure 1h) is more subtle as it highlights the impact of relying on time-averaged spectra, which require $f(\delta, \gamma)$ to be computed differently (recall Section 2). In that case, the $\gamma = 1$ axis no longer intersects the $f > 0.8$ surface, but the $f > 0.2$ surface. This still validates the relevance of the inverse linear law for all practical purposes, while suggesting that more stringent tests could potentially reveal the limits of either the inverse linear law or the SIS model.

[18] In summary, the dynamo simulation indicates that the inverse linear law is a robust candidate to express the dependence of τ_n on n , and that instantaneous and time-averaged spectra statistically lead to the same estimate of the associated secular-variation timescale. In addition, our results show that it is of advantage to resort to time-averaged spectra to increase the robustness of the estimate of τ_{SV} .

5. Summary and Discussion

[19] In this study, we confirmed that the correlation times τ_n in the geomagnetic field and in numerical dynamos could be modelled by a one-parameter law of the form $\tau_n = \tau_{\text{SV}}/n$ for the non-dipole field [*Christensen and Tilgner*, 2004], to within the fluctuations predicted by a SIS model [*Hulot and Le Mouél*, 1994]. In addition, the statistics we obtained for a more general two-parameter law of the form $\tau_n = \delta \times n^{-\gamma}$, support that the value $\gamma = 1$ is perfectly acceptable. Using recent satellite models such as POMME-6 [*Maus et al.*, 2010], GRIMM-2 [*Lesur et al.*, 2010] and CHAOS-3 [*Olsen et al.*, 2010], we found a value $\tau_{\text{SV}} \approx 415 \pm_{45}^{55}$ yr. Given the agreement found between instantaneous and “time-averaged” estimates of τ_{SV} for the numerical dynamo, we would expect the above figure to be appropriate to describe the dynamics of the geomagnetic field on timescales much longer than that of the historical record. To determine a robust estimate of τ_{SV} in geomagnetic field models, we used an algorithm based on F -distributions to account for the natural fluctua-

L09306

LHUILIER ET AL.: GEOMAGNETIC SECULAR-VARIATION TIMESCALE

L09306

tions expected for the correlation times. When considering time-averaged spectra, this particular choice of distribution is however less crucial, essentially because F -distributions with a large number of degrees of freedom are less skewed, and the fluctuations of the various τ_n more confined. The last line of Table 1 shows accordingly that a least-squares estimate of τ_{SV} based on time-averaged spectra of the dynamo model coincides with the more sophisticated estimate based on F -statistics. For the sake of simplicity, we would therefore recommend to use a least-squares algorithm to recover the value of τ_{SV} from time-averaged spectra in dynamo simulations.

[20] An inverse linear law is indicative of a secular variation governed by convective transport, at least at those scales for which we have observations [Holme and Olsen, 2006]. This behaviour is also conveyed by the inverse dependence of τ_{SV} on the magnetic Reynolds number [Christensen and Tilgner, 2004]. In the absence of any better, physically motivated, candidate for the value of the exponent gamma of the two-parameter power law, there is no obvious reason not to choose $\gamma = 1$.

[21] From a practical point of view, the secular-variation timescale has already been used to estimate the magnetic dissipation time [Christensen and Tilgner, 2004] and the limit of predictability of the Earth's dynamo [Hulot et al., 2010b]. In the broader context of geomagnetic data assimilation [Fournier et al., 2010], the secular-variation timescale could provide a convenient and sensible means to rescale the time axis of dynamo simulations, by multiplying the non-dimensional time of the numerical model by a factor equal to the ratio of the secular-variation timescale of the Earth (expressed in years) to that of the model (dimensionless, and estimated by applying a least-squares algorithm to time-averaged spectra). The advantage of this procedure is twofold: it is based on a quantity we just found to be reasonably well constrained by the observations, and it implies a consistent rescaling on all those scales effectively probed by the observations. From a dynamical standpoint, as the secular-variation timescale is inversely proportional to the magnetic Reynolds number [Christensen and Tilgner, 2004] and also mildly sensitive to the value of the Ekman number (F. Lhuillier et al., Earth's dynamo limit of predictability controlled by magnetic dissipation, submitted to *Geophysical Journal International*, 2011), this rescaling would amount to adjusting the level of magnetic turbulence of the numerical model to that of the Earth, while mitigating the discrepancy in kinematic viscosities.

[22] **Acknowledgments.** We thank U.R. Christensen and an anonymous reviewer for their very useful reviews. F.L. also thanks C. Finlay for his constructive comments on a preliminary version of the manuscript. Numerical computations were performed at S-CAPAD, IPGP, France. This is IPGP contribution 3149.

[23] The Editor thanks Ulrich Christensen and an anonymous reviewer.

References

- Aubert, J., J. M. Aurnou, and J. Wicht (2008), The magnetic structure of convection-driven numerical dynamos, *Geophys. J. Int.*, **172**(3), 945–956, doi:10.1111/j.1365-246X.2007.03693.x.
- Christensen, U. R., and J. Aubert (2006), Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields, *Geophys. J. Int.*, **166**(1), 97–114, doi:10.1111/j.1365-246X.2006.03009.x.
- Christensen, U. R., and A. Tilgner (2004), Power requirement of the geodynamo from ohmic losses in numerical and laboratory dynamos, *Nature*, **429**(6988), 169–171, doi:10.1038/nature02508.
- Christensen, U. R., J. Aubert, and G. Hulot (2010), Conditions for Earth-like geodynamo models, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **296**(3–4), 487–496, doi:10.1016/j.epsl.2010.06.009.
- Finlay, C. C., et al. (2010), International geomagnetic reference field: The eleventh generation, *Geophys. J. Int.*, **183**(3), 1216–1230, doi:10.1111/j.1365-246X.2010.04804.x.
- Fournier, A., G. Hulot, D. Jault, W. Kuang, A. Tangborn, N. Gillet, E. Canet, J. Aubert, and F. Lhuillier (2010), An introduction to data assimilation and predictability in geomagnetism, *Space Sci. Rev.*, **155**, 247–291, doi:10.1007/s11214-010-9669-4.
- Holme, R., and N. Olsen (2006), Core surface flow modelling from high-resolution secular variation, *Geophys. J. Int.*, **166**(2), 518–528, doi:10.1111/j.1365-246X.2006.03033.x.
- Hongre, L., G. Hulot, and A. Khokhlov (1998), An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **106**(3–4), 311–335, doi:10.1016/S0031-9201(97)00115-5.
- Hulot, G., and J.-L. Le Mouél (1994), A statistical approach to the Earth's main magnetic field, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **82**(3–4), 167–183, doi:10.1016/0031-9201(94)90070-1.
- Hulot, G., C. C. Finlay, C. G. Constable, N. Olsen, and M. Manda (2010a), The magnetic field of planet Earth, *Space Sci. Rev.*, **152**, 159–222, doi:10.1007/s11214-010-9644-0.
- Hulot, G., F. Lhuillier, and J. Aubert (2010b), Earth's dynamo limit of predictability, *Geophys. Res. Lett.*, **37**, L06305, doi:10.1029/2009GL041869.
- Jackson, A., A. R. T. Jonkers, and M. R. Walker (2000), Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records, *Philos. Trans. R. Soc. London, A*, **358**(1768), 957–990.
- Khokhlov, A., G. Hulot, and J. Carlot (2001), Towards a self-consistent approach to palaeomagnetic field modelling, *Geophys. J. Int.*, **145**(1), 157–171, doi:10.1111/j.1365-246X.2001.01386.x.
- Lesur, V., I. Wardinski, M. Rother, and M. Manda (2008), GRIMM: The GFZ reference internal magnetic model based on vector satellite and observatory data, *Geophys. J. Int.*, **173**(2), 382–394, doi:10.1111/j.1365-246X.2008.03724.x.
- Lesur, V., I. Wardinski, M. Hamoudi, and M. Rother (2010), The second generation of the GFZ Reference Internal Magnetic Model: GRIMM-2, *Earth Planets Space*, **62**(765–773), doi:10.5047/eps.2010.07.007.
- Lowes, F. J. (1966), Mean-square values on sphere of spherical harmonic vector fields, *J. Geophys. Res.*, **71**(8), 2179.
- Lowes, F. J. (1974), Spatial power spectrum of the main geomagnetic field, and extrapolation to the core, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **36**(3), 717–730.
- Mauersberger, P. (1956), Das Mittel der Energiedichte des geomagnetischen Hauptfeldes an der Erdoberfläche und seine säkulare Änderung, *Gerlands Beitr. Geophys.*, **65**, 207–215.
- Maus, S., C. Manoj, J. Rauberg, I. Michaelis, and H. Lühr (2010), NOAA/NGDC candidate models for the 11th generation International Geomagnetic Reference Field and the concurrent release of the 6th generation Pomme magnetic model, *Earth Planets Space*, **62**(10), 729–735, doi:10.5047/eps.2010.07.006.
- Olsen, N., H. Lühr, T. J. Sabaka, M. Manda, M. Rother, L. Tøffner-Clausen, and S. Choi (2006), CHAOS—a model of the Earth's magnetic field derived from CHAMP, Ørsted, and SAC-C magnetic satellite data, *Geophys. J. Int.*, **166**(1), 67–75, doi:10.1111/j.1365-246X.2006.02959.x.
- Olsen, N., M. Manda, T. J. Sabaka, and L. Tøffner-Clausen (2010), The CHAOS-3 geomagnetic field model and candidates for the 11th generation IGRF, *Earth Planets Space*, **62**(10), 719–727, doi:10.5047/eps.2010.07.003.
- Stacey, F. (1992), *Physics of the Earth*, 3rd ed., Brookfield, Brisbane, Qld., Australia.
- von Storch, H., and F. Zwiers (2001), *Statistical Analysis in Climate Research*, Cambridge Univ. Press, New York.
- J. Aubert, A. Fournier, G. Hulot, and F. Lhuillier, Institut de Physique du Globe de Paris, Sorbonne Paris Cité, Université Paris Diderot, INSU/CNRS, UMR 7154, F-75005 Paris, France. (lhuillier@ipgp.fr)

Annexe B

Lettre sur la portée de prédictibilité de la dynamo terrestre



Earth's dynamo limit of predictability

G. Hulot,¹ F. Lhuillier,^{1,2} and J. Aubert²

Received 20 November 2009; revised 22 January 2010; accepted 19 February 2010; published 25 March 2010.

[1] Earth's magnetic field is currently decreasing, reducing the protection it offers against charged particles coming from space and increasing space weather hazards within the near-Earth environment. Modeling the future evolution of the field is thus of considerable interest. But how far in the future this can conceivably be done is still an open question. Here we report on the first systematic investigation of the limit of predictability of fully consistent 3D numerical dynamo simulations, and suggest that the Earth's dynamo is likely unpredictable beyond a century, making decade timescale forecasts of the main magnetic field conceivable, but rendering longer-term predictions, such as the timing of the next reversal, totally unpredictable. **Citation:** Hulot, G., F. Lhuillier, and J. Aubert (2010), Earth's dynamo limit of predictability, *Geophys. Res. Lett.*, 37, L06305, doi:10.1029/2009GL041869.

1. Introduction

[2] The main magnetic field produced by the geodynamo within the Earth's liquid core provides a very effective shield against the energetic charged particles that come from the Sun and space [Lundin *et al.*, 2007]. It is also an essential ingredient in defining the near-Earth space weather conditions within which satellites orbit [Baker, 2002]. Its intensity is however known to decrease significantly at present, especially in the so-called South-Atlantic Anomaly, where the low value of the field is already an issue to space technology [Heitzler, 2002]. Whether this trend will last for some time, enhance space weather hazards on the decade timescale and possibly lead to a reversal of the field on the millennium timescale, is a question that forecasting strategies of the type commonly used in meteorology [Kalnay, 2003] could possibly answer. Such strategies start developing in the context of geodynamo assimilation [Fournier *et al.*, 2007; Kuang *et al.*, 2008]. But just as for meteorology, forecasts will inevitably be limited in time by the nonlinear nature of the governing equations, as the geodynamo unfortunately belongs to the same class of non-periodic dynamical systems that can exhibit chaotic behavior.

[3] Although some attempts have been made to characterize this system as such, using either a complex generalization of Lorenz's [1963] equations [Jones *et al.*, 1985], or a turbulent mean-field dynamo model [Ryan and Sarson,

2008], no investigation of the finite limit of predictability of the fully consistent 3D magnetohydrodynamic equations that govern it has yet been carried out. Appropriate geodynamo simulation codes have however been available for a little more than a decade [Glatzmaier and Roberts, 1995], leading to substantial progress in our understanding of the physical mechanisms at work [Christensen and Wicht, 2007] and of what may be responsible for the current decrease of the main field [Hulot *et al.*, 2002]. This prompted us to investigate the finite limit of predictability of such dynamos, taking advantage of the now relatively accessible CPU time those codes require to run.

2. Numerical Models and Relevant Parameters

[4] In our simulations, the dynamo is assumed thermally driven, with fixed and homogeneous temperatures imposed at both the inner-core and core-mantle boundaries. The electrically conducting inner core (with the same conductivity as the liquid core) is free to rotate (along the Earth's rotation axis) with respect to the electrically insulating mantle, and mechanical boundary conditions are assumed rigid at both boundaries. Each simulation can then entirely be defined by four dimensionless control parameters [Christensen and Aubert, 2006]: the modified Rayleigh number $Ra^* = \alpha g_0 \Delta T / \Omega^2 D$, the Ekman number $E = \nu / \Omega D^2$, the Prandtl number $Pr = \nu / \kappa$, and the magnetic Prandtl number $Pm = \nu / \eta$ (with α the thermal expansion coefficient; g_0 the gravity at the core-mantle boundary; ΔT the temperature difference between the inner and outer boundaries; Ω the Earth's rotation rate; D the difference between the inner-core and outer-core radii; ν , the kinematic viscosity; κ and η the thermal and magnetic diffusivities of the core).

[5] Unfortunately no such simulation can yet be run with what are believed to be relevant parameter values for the Earth's dynamo [Christensen and Wicht, 2007] (roughly $E = 10^{-15} - 10^{-14}$, $Pr = 0.1 - 1$ and $Pm = 10^{-6} - 10^{-5}$, as inferred from the known physical properties of the mainly iron alloy core, though E could be as large as 10^{-9} if turbulent viscosity is taken into account [Roberts, 2007]), the value of Ra^* being essentially unknown (save that it must be well beyond the critical number required for dynamo action). This limitation can however be obviated by running a large number of numerically accessible dynamo simulations, identifying underlying physical mechanisms, and inferring scaling rules that can hopefully be extrapolated to the Earth case, a strategy that has already been extensively discussed, met with some success [Christensen and Aubert, 2006; Christensen and Tilgner, 2004], and which we will therefore use.

[6] For that purpose, another dimensionless parameter turns out to be very useful: the Reynolds number $Rm = U_0 D / \eta$ (U_0 being the RMS value of the flow velocity within

¹Equipe de Géomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris, Université Paris-Diderot, INSU, CNRS, Paris, France.

²Equipe de Dynamique des Fluides Géologiques, Institut de Physique du Globe de Paris, Université Paris-Diderot, INSU, CNRS, Paris, France.

the dynamo), which can be seen as the ratio $Rm = \tau_D / \tau_T$ of the magnetic diffusive time $\tau_D = D^2/\eta$ to the turnover time $\tau_T = D/U_0$. For the Earth $D \approx 2260$ km, $\tau_D \approx 120$ kyr (assuming $\eta = 1.32 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ as *Christensen and Tilgner* [2004]) and Rm is on order $Rm = 10^2 - 10^3$ [*Christensen and Wicht*, 2007]. Contrary to the control parameters E , Pr , Pm , and Ra^* , Rm is not a number that can be set a priori in dynamo simulations. Rather, it comes as an output of the simulations. But in varying the control parameters one can easily ensure that a wide range of Rm values is produced.

[7] In practice, our dynamo simulations were obtained by solving equations (2)–(5) of *Christensen and Aubert* [2006] and running the code of *Aubert et al.* [2008] (an evolution of the ACD code benchmarked by *Christensen et al.* [2001]), which uses spherical coordinates (r, θ, φ) and a semi-spectral method, with spherical harmonics $Y_n^m(\theta, \varphi)$ expansions and a second-order finite-differencing scheme in the radial direction (with geometrical progression towards the boundaries to resolve boundary layers). Solutions at time t were thus defined by five scalar functions of the form $X(r, \theta, \varphi, t) = \sum x_n^m(r, t) Y_n^m(\theta, \varphi)$: two for the poloidal and toroidal components of the flow, two for the poloidal and toroidal components of the magnetic field, and one for the temperature field. Resolution varied between 44 and 106 in spherical

harmonic degree, and 90 and 160 in radial grid points, depending on the simulation, to ensure convergence.

3. Error Growth in Perturbed Dynamo Simulations

[8] Our investigation of the limits of predictability of those dynamos began with the production of 30 reference simulations, each with different sets of control parameters (see Figures 1–3). For each reference simulation, we next closely followed the approach originally used in meteorology [*Lorenz*, 1965; *Charney et al.*, 1966; *Kalnay*, 2003]. This consists in slightly perturbing the system in a perfectly controlled way at a known time, and comparing the subsequent evolution of the perturbed simulation with respect to the reference one.

[9] We were careful to ensure that simulations could be stopped and restarted without introducing rounding errors, and introduced perturbations of controlled relative magnitude ε at times t_p in the following ways: either in just the axial dipole poloidal magnetic field (changing the corresponding $x_1^0(r, t_p)$ values into $\tilde{x}_1^0(r, t_p) = x_1^0(r, t_p)(1 + \varepsilon)$), or in all harmonics of one of the $X(r, \theta, \varphi, t)$ functions defining the magnetic, flow or temperature fields (changing all the corresponding $x_n^m(r, t_p)$ values into $\tilde{x}_n^m(r, t_p) =$

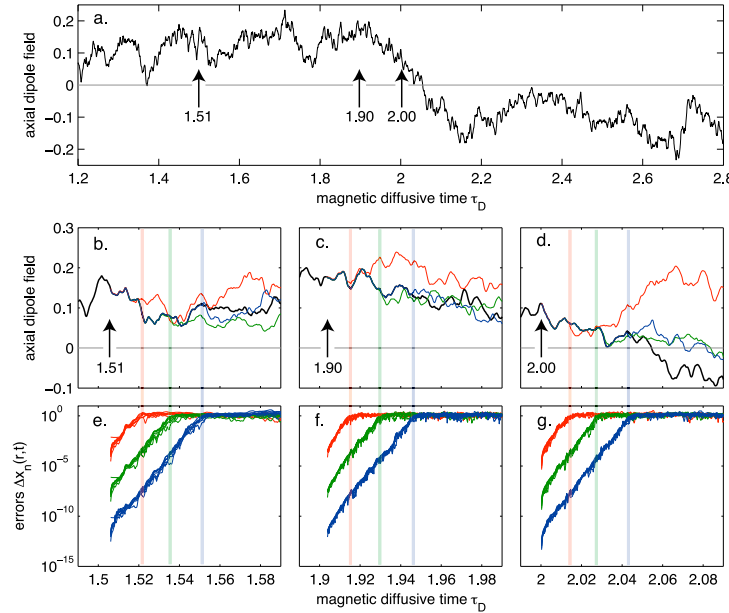


Figure 1. Error growth in a perturbed dynamo simulation. In this example (with $E = 10^{-3}$, $Pr = 1$, $Pm = 10$ and $Ra^* = 0.6$, leading to $Rm \approx 500$), perturbations of three different relative magnitudes ($\varepsilon = 10^{-2}$, red; $\varepsilon = 10^{-6}$, green; and $\varepsilon = 10^{-10}$, blue, same color codes in all plots) have been introduced in the axial dipole at three different times (as indicated by black arrows). (a) The axial dipole field at the core surface for the reference run is shown (arbitrary scale) as a function of time (scaled in units of $\tau_D \approx 120$ kyr). Close-ups also show the diverging evolution of the axial dipole field once the perturbation has been introduced at time (b) $t_p = 1.51 \tau_D$, (c) $t_p = 1.90 \tau_D$ or (d) $t_p = 2.00 \tau_D$. Introducing a perturbation in the axial dipole also affects all other physical fields: shown here on a semi-logarithmic scale, all spherical harmonic degrees (up to $n = 8$) (e) of the poloidal magnetic field at the core surface, and (f) of the poloidal flow and (g) temperature fields at mid-fluid core depth (as computed from the corresponding $\Delta x_n(r, t)$, see text), each plot corresponding to a different value of t_p . Color-coded vertical bars mark the times when the perturbed solutions start behaving in a way totally unrelated to the reference solution.

L06305

HULOT ET AL.: EARTH'S DYNAMO LIMIT OF PREDICTABILITY

L06305

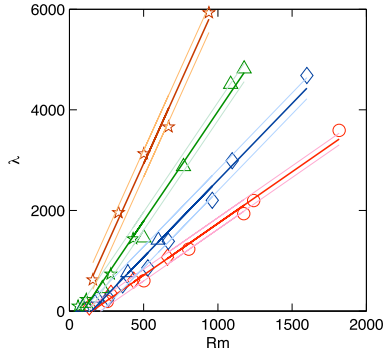


Figure 2. Error growth rate λ as a function of the magnetic Reynolds number Rm . All simulations have been run with the Earth-like value $Pr = 1$. Different colors correspond to different Ekman numbers: $E = 10^{-3}$, red; $E = 3 \times 10^{-4}$, blue; $E = 10^{-4}$, green; $E = 3 \times 10^{-5}$, brown. Different symbols correspond to different range of magnetic Prandtl numbers: $Pm = 0.5 - 1$, stars; $Pm = 2 - 3$, triangles; $Pm = 5 - 9$, diamonds; $Pm = 10 - 15$, circles. For each value of E , a best linear fit is also plotted with 1σ limits (light lines). Note that all $E = 3 \times 10^{-5}$ simulations have only been run with $Pm = 0.5 - 1$ and for numerically accessible $Rm < 1000$.

$x_n^m(r, t_p) (1 + \alpha_n^m \epsilon)$, each α_n^m being an independent draw from a zero mean unit variance normal law). Each perturbed solution was next restarted, and compared to the reference solution.

Logarithmic plots of $\Delta x_n(r, t) = \sqrt{\frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n \frac{(\bar{x}_n^m(r, t) - x_n^m(r, t))^2}{\langle x_n^m(r) \rangle^2}}$

(where $\langle x_n^m(r) \rangle$ stands for the RMS value of the $x_n^m(r, t)$ time series) were finally used to infer the perturbation growth rate as seen in each degree n of the magnetic, flow or temperature fields at various radii within the core.

[10] Figure 1 illustrates the consequence of introducing such perturbations at any of three different times in one

reference run. In all cases, the perturbed simulation first follows the reference solution closely, but always eventually evolves in a totally unrelated way. The larger the perturbation, the sooner the divergence occurs. Plotting the difference between the perturbed and reference solutions on a semi-logarithmic scale clearly shows that this difference is always growing in the same exponential manner. For each reference run we similarly ran a large number of tests and checked that this behavior was always found, independently of the time and the way the initial perturbation was introduced (be it in the magnetic, flow, or temperature fields involved in the equations governing the dynamo), and independently of the parameter used to monitor the subsequent evolution of the simulations (again, magnetic, flow, or temperature fields). For each reference simulation, always the same error growth rate was recovered, to within roughly 20% fluctuations. From this we infer that each reference simulation, and hence each set of control parameters E , Pr , Pm and Ra^* , is associated with a single dominant error growth rate, which we define as $\lambda = \tau_e^{-1}$, where τ_e is the e-folding time of the exponential growth.

4. Scaling Rules for the Error Growth Rate

[11] The universal character of the error growth rate we observe suggests that it is directly related to the advection of the error fields by the background dynamo flow, which indeed advects all fields (magnetic, temperature and the flow itself) in a similar manner. This in turn suggests that the error growth rate λ is scaled by the inverse of the turnover time $\tau_T = D/U_0$, and is therefore proportional to $Rm = \tau_D / \tau_T$ when measured in units of the known quantity τ_D^{-1} . Figure 2 shows that this is indeed the case. Figure 2 however also shows that the proportionality factor is sensitive to the value of E , which we further interpret in terms of a geometrical effect of the leading scales of the background dynamo convection. Advection of the field by the dynamo flow is also known to govern the timescales τ_n that characterize the time variations of each non-dipole spherical harmonic degree

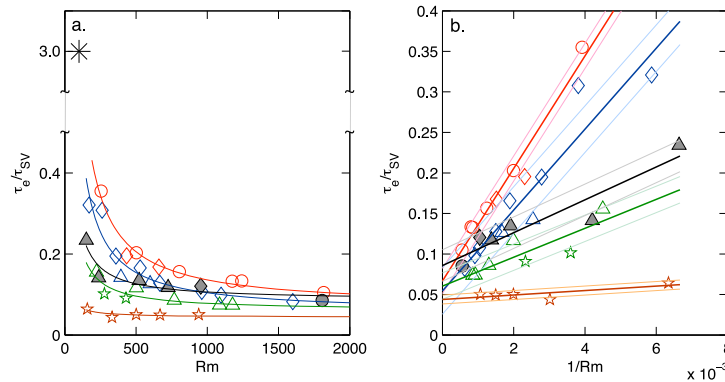


Figure 3. Ratio τ_e / τ_{SV} of the error growth e-folding time τ_e to the characteristic timescale τ_{SV} (computed following Christensen and Tilgner [2004]), (a) as a function of the magnetic Reynolds number Rm , and (b) as a function of $1/Rm$. Same color-coding and symbols as in Figure 2. For each value of E , a best linear fit is also plotted with 1σ limits (light lines) in Figure 3b, with corresponding curves reported in Figure 3a. Also shown are τ_e / τ_{SV} ratios for six compositionally driven dynamo simulations computed as by Olson *et al.* [2009], with $E = 3 \times 10^{-4}$, $Pr = 1$ and $Pm = 3 - 12$ (filled black symbols, linear fit with 1σ limits in black lines), and for the high E and low Rm compositionally driven dynamo specifically investigated by Olson *et al.* [2009] (large star).

n of the (observable) field at the core surface (defined as $\tau_n = \left[\left\langle \sum_{m=0}^n (g_{nm}^2 + h_{nm}^2) \right\rangle / \left\langle \sum_{m=0}^n (\dot{g}_{nm}^2 + \dot{h}_{nm}^2) \right\rangle \right]^{1/2}$, where g and h are the Gauss coefficients of the field, the dot marks their time derivative and $\langle \rangle$ the time average [see Hulot and Le Mouél, 1994; Christensen and Tilgner, 2004]). Indeed, in numerical simulations as well as for the Earth's magnetic field, those follow a $\tau_n = \tau_{SV} / n$ law to within a reasonable approximation, with τ_{SV}^{-1} (again measured in units of the known quantity τ_D^{-1}) being mainly proportional to Rm . This common main dependence of $\lambda = \tau_e^{-1}$ and τ_{SV}^{-1} on Rm finally suggests that we also plot the ratio τ_e / τ_{SV} as a function of Rm . Figure 3 shows that for high Rm (low $1/Rm$), τ_e / τ_{SV} converges towards a constant value, fairly independently of the exact value of E (at least within the range $E = 10^{-3} - 10^{-5}$ of values reasonably accessible for such a multi-run numerical study, and close to the $E = 10^{-6}$ value currently achieved in the most advanced dynamo simulations [Kageyama et al., 2008; Christensen et al., 2009]). This convergence is achieved all the faster as E is small.

5. Consequences for Earth's Dynamo Predictability

[12] Given that, as we saw, $E < 10^{-9}$ and $Rm > 100$ for the geodynamo, Figure 3 suggests a maximum value of $\tau_e \approx 0.05\tau_{SV}$ for the Earth's main magnetic field. Using $\tau_{SV} = 535$ yr [Christensen and Tilgner, 2004] then leads to an e-folding time of $\tau_e \approx 30$ yr, and a doubling time of roughly 20 years, analogue of the 1.5 days doubling time in meteorology [Kalnay, 2003].

[13] These results have several important implications. They first show that, provided the physics of the geodynamo is properly captured by such codes, data assimilation strategies based on 3D dynamo codes [Kuang et al., 2008] could significantly improve on current simple linear temporal extrapolations of the field [Maus et al., 2005]. Satellite data now make it possible to know the main magnetic field within 10–20 nT at the Earth's surface (the average magnitude of the field being on order 40,000 nT). But linear extrapolations typically lead to errors on order 100 nT after just five years [Maus et al., 2008]. Our results thus suggest that using an ideal assimilation scheme could lead to a prediction of similar quality after 50 to 70 years (as inferred from $\tau_e \approx 30$ yr times $\ln(100/20)$ or $\ln(100/10)$). In fact, the evolution of large-scale structures (such as the South Atlantic Anomaly, which does not need to be known to much better than 10% error for most applications [Heitzler, 2002]) might even be predictable beyond that range, since in practice (and as also observed in meteorology [Kalnay, 2003]), the error growth rate always slackens when errors reach large values (see Figure 1). In contrast, our results also point at the fundamental impossibility of predicting when the next magnetic field reversal will occur. Indeed, in each of our simulations the error growth rate is always the same, even close to a reversal; and once an error has led a perturbed solution to evolve in a way unrelated to the unperturbed solution, information about the timing of the next reversal is also lost (Figure 1d). Since we know from examination of past reversals [Constable and Korte, 2006] that the next reversal could not occur before a couple of thousand years, way beyond the century timescale that can possibly be

envisioned for any realistic prediction, it thus seems very unlikely that the next reversal could plausibly be predicted.

6. Concluding Comments

[14] All numerical simulations discussed so far are thermally driven, and assume simple boundary conditions. The way Earth's dynamo is driven is likely more complex, and the above extrapolation to Earth's dynamo predictability should therefore be taken with substantial caution. Also, in much the same way progress in numerical modeling has led to a reduction by a factor two of the doubling time in meteorology [see Kalnay, 2003], future simulations with more realistic lower Ekman numbers could lead to a lower estimate of the e-folding time than we inferred. However, it is worth noting that additional results from a few simulations based on compositionally (rather than thermally) driven numerical dynamos do bring substantial support to the general character of our findings. Those simulations have been computed following Olson et al. [2009], and have also been found to lead to the same type of error growth as those reported above. In particular, and as can be seen in Figure 3, the corresponding τ_e / τ_{SV} ratios again converge towards the same limit value for high Rm . Interestingly, we finally note that in the case of the compositionally driven dynamo investigated in much detail by Olson et al. [2009] (with $E = 6.5 \times 10^{-3}$, $Pr = 1$, $Pm = 20$ and $Ra = 1.9 \times 10^4$, where Ra is the compositional Rayleigh number as defined by Olson et al. [2009], leading to $Rm \approx 100$), we do find a very high value of $\tau_e / \tau_{SV} \approx 3$ (large star in Figure 3a), showing that such a dynamo is indeed exceptionally predictable, in agreement with these authors' claim that (contrary to dynamos with low E) such a dynamo could display some long-term reversal precursor. Our results however clearly point at Earth's dynamo being unfortunately far less predictable.

[15] **Acknowledgments.** Very helpful comments by Andrew Tangborn and an anonymous reviewer are gratefully acknowledged. This study was supported by the SEDIT programme of CNRS-INSU. Numerical computations were performed at S-CAPAD, IPGP, France and at HPC resources from GENCI-CINES/IDRIS (grant 2009-042122). This is IPGP contribution 2604.

References

- Aubert, J., J. Aumou, and J. Wicht (2008), The magnetic structure of convection-driven numerical dynamos, *Geophys. J. Int.*, **172**, 945–956, doi:10.1111/j.1365-246X.2007.03693.x.
- Baker, D. N. (2002), How to cope with space weather, *Science*, **297**, 1486–1487, doi:10.1126/science.1074956.
- Chamey, J. G., R. G. Fleagle, H. Riehl, V. E. Lally, and D. Q. Wark (1966), The feasibility of a global observation and analysis experiment, *Bull. Am. Phys. Soc.*, **47**, 200–220.
- Christensen, U. R., and J. Aubert (2006), Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields, *Geophys. J. Int.*, **166**, 97–114, doi:10.1111/j.1365-246X.2006.03009.x.
- Christensen, U. R., and A. Tilgner (2004), Power requirement of the geodynamo from ohmic losses in numerical and laboratory dynamos, *Nature*, **429**, 169–171, doi:10.1038/nature02508.
- Christensen, U. R., and J. Wicht (2007), Numerical dynamo simulations, in *Treatise on Geophysics*, vol. 8, *Core Dynamics*, edited by P. Olson, pp. 245–282, doi:10.1016/B978-0-444-52748-6.00134-6, Elsevier, Amsterdam.
- Christensen, U. R., et al. (2001), A numerical dynamo benchmark, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **128**, 25–34, doi:10.1016/S0031-9201(01)00275-8.
- Christensen, U. R., V. Holzwarth, and A. Reiners (2009), Energy flux determines magnetic field strength of planets and stars, *Nature*, **457**, 167–169, doi:10.1038/nature07626.

L06305

HULOT ET AL.: EARTH'S DYNAMO LIMIT OF PREDICTABILITY

L06305

- Constable, C., and M. Korte (2006), Is Earth's magnetic field reversing?, *Earth Planet. Sci. Lett.*, *246*, 1–16, doi:10.1016/j.epsl.2006.03.038.
- Fournier, A., C. Eymin, and T. Alboussière (2007), A case for variational geomagnetic data assimilation: Insights from a one dimensional, nonlinear, and sparsely observed MHD system, *Nonlinear Processes Geophys.*, *14*, 163–180.
- Glatzmaier, G. A., and P. H. Roberts (1995), A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *91*, 63–75, doi:10.1016/0031-9201(95)03049-3.
- Heirtzler, J. R. (2002), The future of the South Atlantic anomaly and implications for radiation damage in space, *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, *64*, 1701–1708, doi:10.1016/S1364-6826(02)00120-7.
- Hulot, G., and J. L. Le Mouél (1994), A statistical approach to the Earth's main magnetic field, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *82*, 167–183, doi:10.1016/0031-9201(94)90070-1.
- Hulot, G., C. Eymin, B. Langlais, M. Manda, and N. Olsen (2002), Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data, *Nature*, *416*, 620–623, doi:10.1038/416620a.
- Jones, C. A., N. O. Weiss, and F. Cattaneo (1985), Nonlinear dynamos: A complex generalization of the Lorenz equations, *Physica D*, *14*, 161–176, doi:10.1016/0167-2789(85)90176-9.
- Kageyama, A., T. Miyagoshi, and T. Sato (2008), Formation of current coils in geodynamo simulations, *Nature*, *454*, 1106–1109, doi:10.1038/nature07227.
- Kalnay, E. (2003), *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*, 341 pp., Cambridge Univ. Press, Cambridge, U. K.
- Kuang, W., A. Tangborn, W. Jiang, D. Liu, Z. Sun, J. Bloxham, and Z. Wei (2008), MoSST_DAS: The first generation geomagnetic data assimilation framework, *Commun. Comput. Phys.*, *3*, 85–108.
- Lorenz, E. N. (1963), Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, *20*, 130–141, doi:10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2.
- Lorenz, E. N. (1965), A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model, *Tellus*, *17*, 321–333.
- Lundin, R., H. Lammer, and I. Ribas (2007), Planetary magnetic fields and solar forcing: Implications for atmospheric evolution, *Space Sci. Rev.*, *129*, 245–278, doi:10.1007/s11214-007-9176-4.
- Maus, S., et al. (2005), The 10th generation international geomagnetic reference field, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *151*, 320–322, doi:10.1016/j.pepi.2005.03.006.
- Maus, S., L. Silva, and G. Hulot (2008), Can core-surface flow models be used to improve the forecast of the Earth's main magnetic field?, *J. Geophys. Res.*, *113*, B08102, doi:10.1029/2007JB005199.
- Olson, P., P. Driscoll, and H. Amit (2009), Dipole collapse and reversal precursors in a numerical dynamo, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *173*, 121–140, doi:10.1016/j.pepi.2008.11.010.
- Roberts, P. H. (2007), Theory of the geodynamo, in *Treatise on Geophysics*, vol. 8, *Core Dynamics*, edited by P. Olson, pp. 67–105, doi:10.1016/B978-044452748-6.00133-4, Elsevier, Amsterdam.
- Ryan, D. A., and G. R. Sarson (2008), The geodynamo as a low-dimensional deterministic system at the edge of chaos, *Europhys. Lett.*, *83*, 49001, doi:10.1209/0295-5075/83/49001.

J. Aubert, Equipe de Dynamique des Fluides Géologiques, Institut de Physique du Globe de Paris, Université Paris-Diderot, INSU, CNRS, 4, place Jussieu, Case 89, F-75252 Paris CEDEX 05, France.

G. Hulot and F. Lhuillier, Equipe de Géomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris, Université Paris-Diderot, INSU, CNRS, 4, place Jussieu, Case 89, F-75252 Paris CEDEX 05, France. (gh@ipgp.fr)

Variabilité et prédictibilité de la dynamo terrestre

Grâce aux mouvements de convection dans le noyau fluide de la Terre, la géodynamo est responsable de la génération du champ magnétique terrestre principal qui nous protège notamment du vent solaire. Nous nous attachons dans cette thèse à mieux décrire certains aspects de la dynamique temporelle de cette géodynamo. Dans une approche comparative entre observations et modèles numériques, nous nous intéressons tout d'abord aux temps de corrélation qui caractérisent la variation séculaire du champ géomagnétique à différentes échelles spatiales. En relation avec les premiers schémas d'assimilation des données géomagnétiques, nous abordons ensuite la question de la portée de prédictibilité de la géodynamo, à savoir combien de temps à l'avance il serait possible de prédire le champ magnétique terrestre (par analogie avec la limite de l'ordre d'une semaine en météorologie). Concernant la variabilité à long terme du champ géomagnétique, nous discutons finalement de la possibilité d'utiliser des longues simulations de la géodynamo dans une perspective de comparaison avec des données paléomagnétiques, et nous penchons plus précisément sur la question de la remise à l'échelle de l'axe du temps.

Variability and predictability of the Earth's dynamo

Thanks to convective motion in the liquid core of the Earth, the geodynamo is responsible for the generation of the main geomagnetic field which protects us, in particular, against the solar wind. In this thesis we endeavour to better understand some aspects of the temporal dynamics of the Earth's dynamo. In a comparative approach between observations and numerical models, we are first of all interested in examining the correlation times which characterize the secular variation of the geomagnetic field on various length scales. In connection with the first schemes for assimilation of geomagnetic data, we then tackle the issue of the range of predictability of the geodynamo, to wit how much time in advance it would be possible to predict the Earth's magnetic field (by analogy with the limit of one week in meteorology). As regards the long-term variability of the geomagnetic field, we finally discuss the possibility of using long simulations of the geodynamo in a perspective of comparison with palaeomagnetic data, and we more precisely confine our attention to the rescaling of the time axis.

Variabilität und Vorhersagbarkeit des Geodynamos

Durch Konvektionsströmen im flüssigen Erdkern erzeugt der Geodynamo das geomagnetische Hauptfeld, welches uns vor dem Sonnenwind schützt. In dieser Dissertation sollen einige Aspekte der zeitlichen Dynamik dieses Geodynamos näher untersucht werden. Zuerst werden durch den Vergleich zwischen Beobachtungen und numerischen Modellen die Korrelationszeiten überprüft, welche die Säkularvariation des Erdmagnetfeldes auf verschiedenen Längenskalen charakterisieren. Dann wird in Verbindung mit Assimilationsalgorithmen für geomagnetische Daten die Vorhersagbarkeit des Geodynamos ermittelt: Wie lange im Voraus kann man Aussagen über das Erdmagnetfeld treffen, analog zu der ca. 7-Tages Grenze in der Wettervorhersage? Mit Blick auf die langfristige Variabilität des Erdmagnetfeldes wird schlussendlich die Möglichkeit diskutiert, Simulationen auf großen Zeitskalen mit paläomagnetischen Daten zu vergleichen, wobei besonders die Reskalierung der Zeitachse eine Rolle spielen wird.