Faltung, Korrelation, Filtern

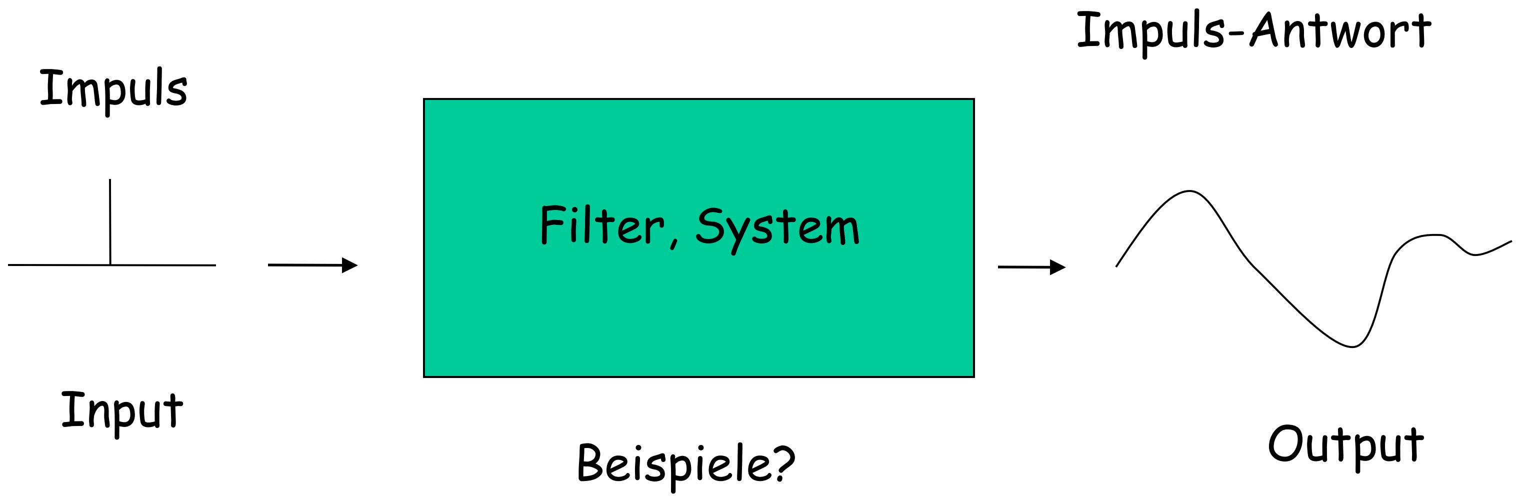
- Wie beschreibe ich lineare Systeme (z.B. Seismometer) -> Faltung, Konvolution, Dekonvolution?
- Wie quantifiziere ich die Ähnlichkeit von Zeitreihen (-> Korrelation)
- Wie quantifiziere ich zeitliche Versätze (z.B. Laufzeitunterschiede) -> Korrelation
- Wie unterdrücke ich bestimmte Frequenzbereiche (-> Filtern)

Shearer: Chapter 11, Instruments and Appendix E (Time series and Fourier transtorms)
Kearey et al: Chapter 2.4, 2.5
Mussett and Khan: Chapter 3.2, 3.3

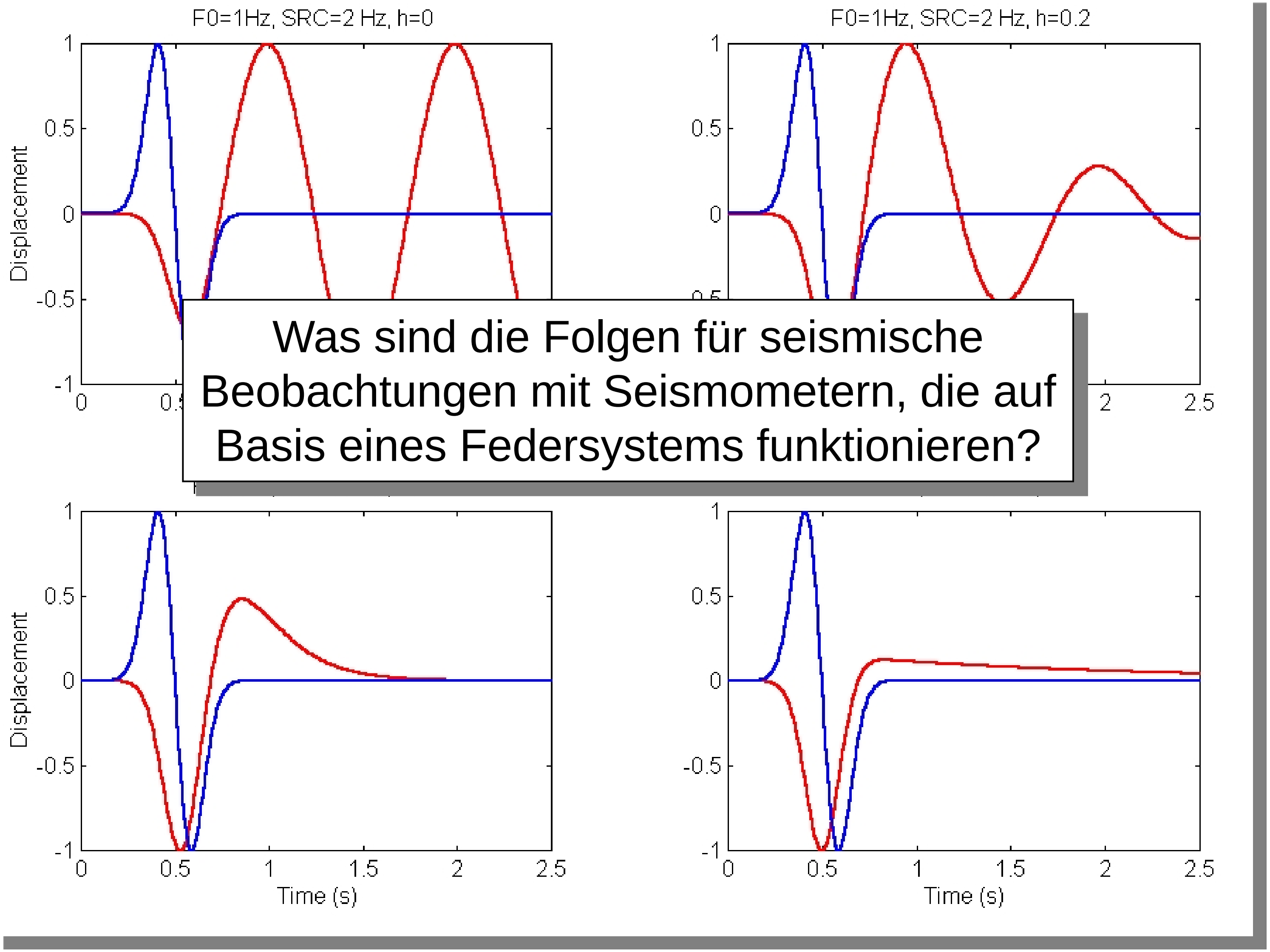
Bearbeiten von Wellenformen – Lineare Systeme

Wie müssen wir unsere digitalisierten Daten behandeln, um Information zu entnehmen? Diese Frage führt uns direkt zu den Konzepten der (De-) Konvolution (Faltung), (Auto-, Kreuz-) Korrelation und Filterung.

Das zentrale Konzept ist die Ausgabe eines Systems auf einen eingegebenen Impuls. Die Impuls-Antwort

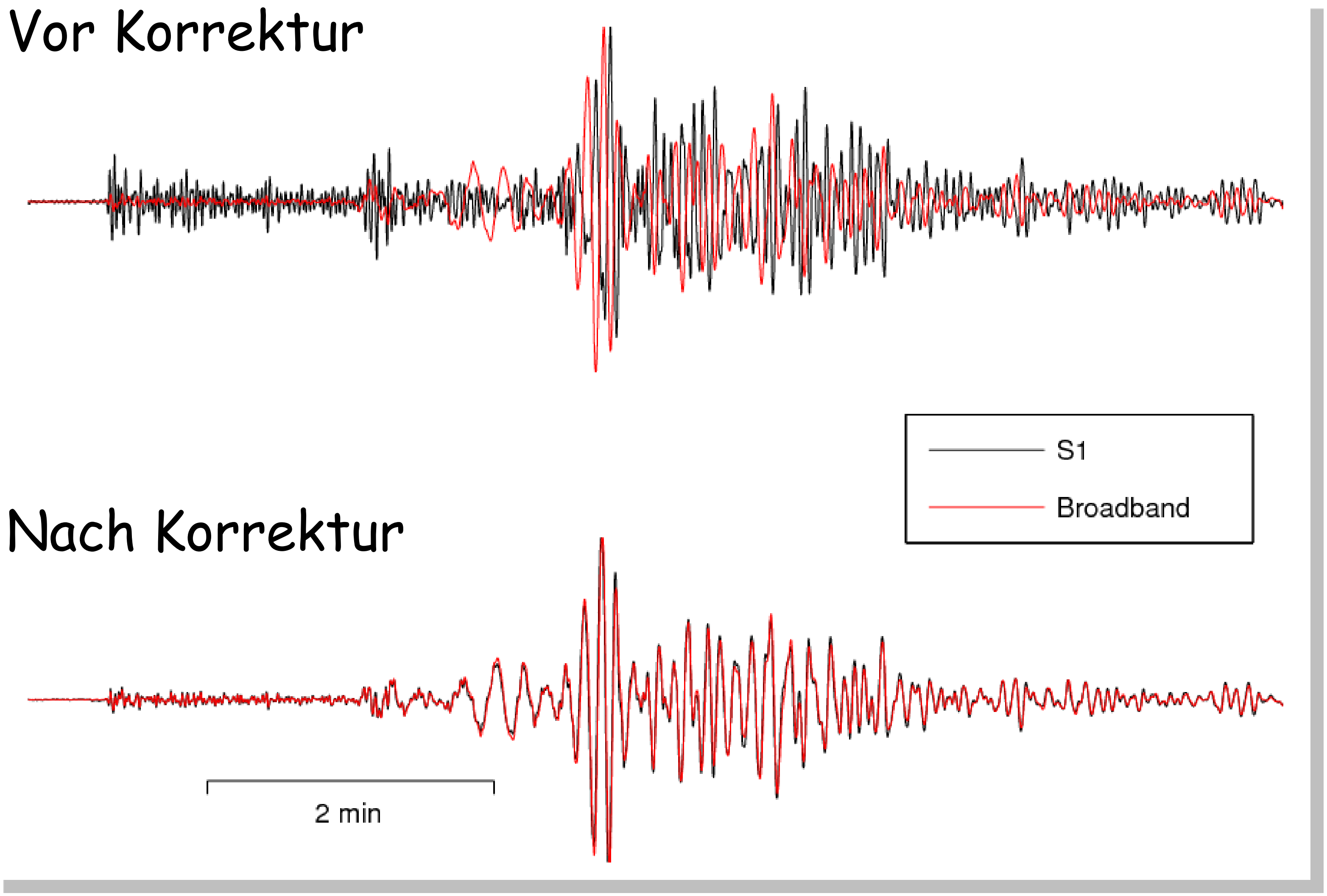


Beispiel: Impuls-Antwort eines Seismometers



Was sind die Folgen für seismische Beobachtungen mit Seismometern, die auf Basis eines Federsystems funktionieren?

Beispiel: Instrumentkorrektur



Diskrete Konvolution (Faltung)

Konvolution (Faltung) ist die mathematische Beschreibung der Änderung der Form eines Eingabesignals nach dem Durchlaufen eines Filters (Filtersystem)

Es gibt ein eigenes mathematisches Symbol für Konvolution:

$$y(t) = g(t) * f(t)$$

Hier ist die Impuls-Antwort Funktion g gefaltet mit dem Eingangssignal f. g wird auch „Greensche Funktion" genannt.

$$y_k = \sum_{i=0}^{m} g_i f_{k-i} \qquad g_i \quad i = 0,1,2,\ldots,m$$

$$k = 0,1,2,\ldots,m+n \qquad f_j \quad j = 0,1,2,\ldots,n$$

Faltung Beispiel
(Matlab)

```
>> x
x =
     0     0     1     0
>> y
y =
     1     2     1
>> conv(x,y)
ans =
     0     0     1     2     1     0
```

Impuls-Response

System Input

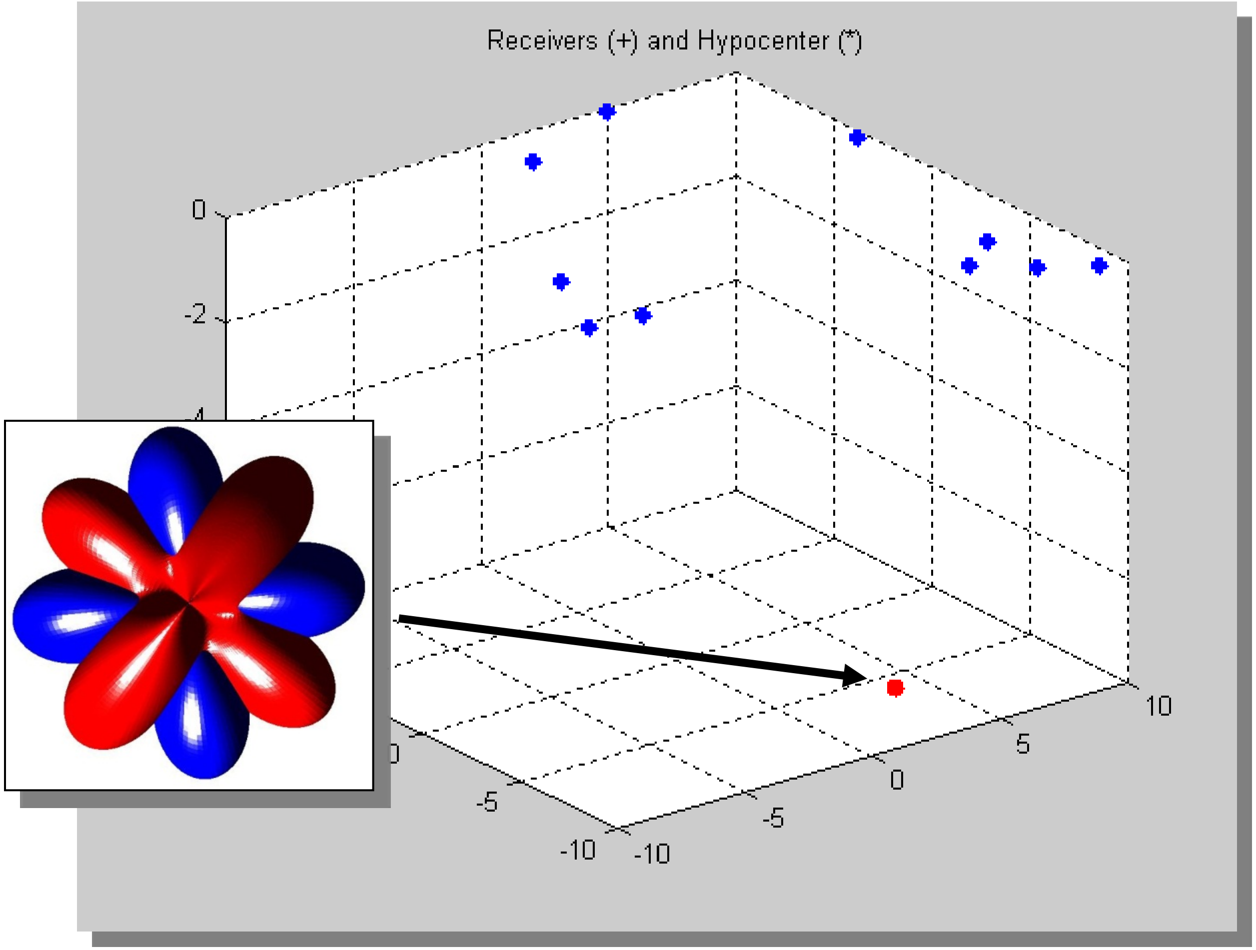
System Output

Faltung Beispiel

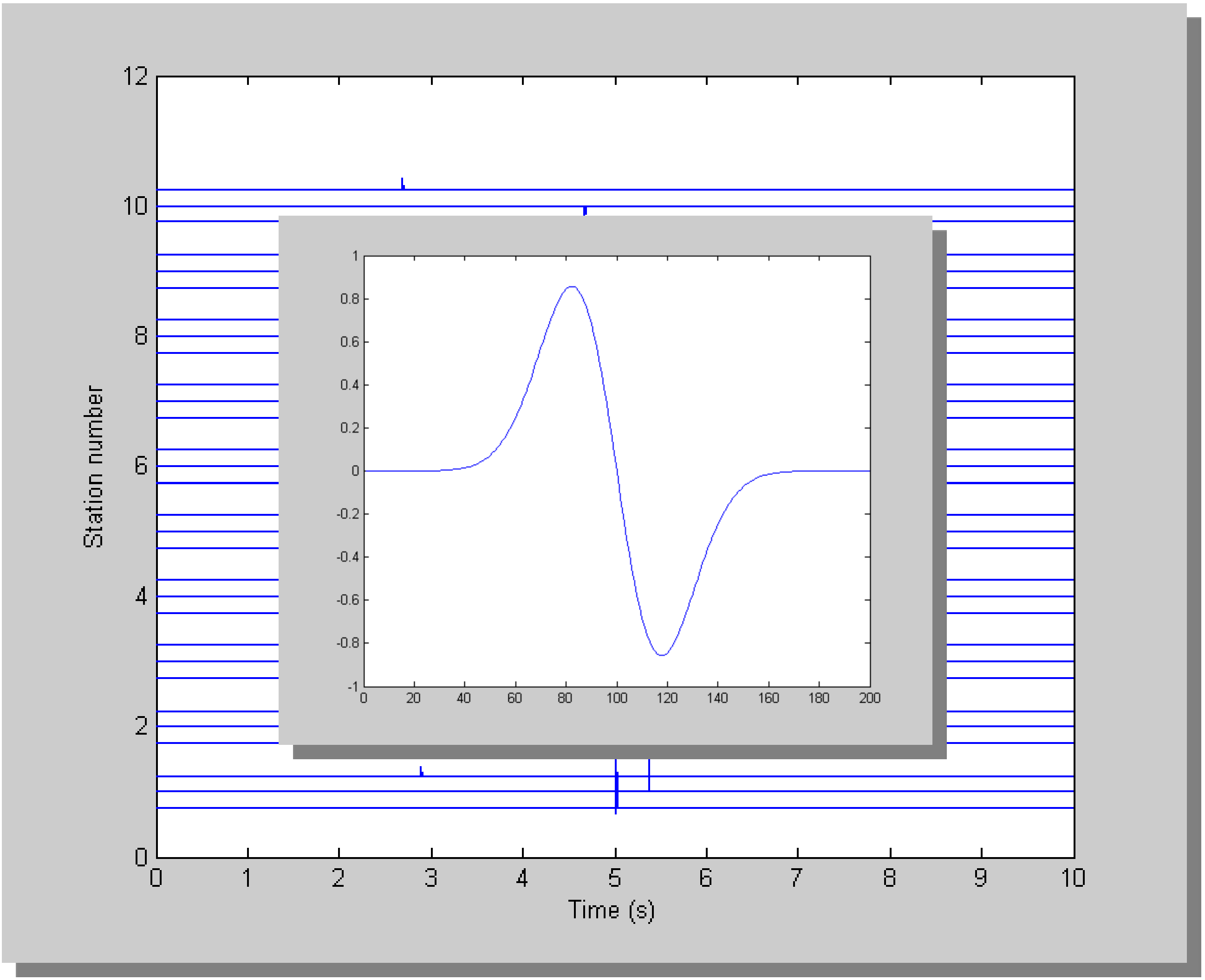
x „Faltung“ **y** **x*y**

								x*y
		0	1	0	0			
					1	2	1	**0**
		0	1	0	0			
				1	2	1		**0**
		0	1	0	0			
			1	2	1			**1**
		0	1	0	0			
		1	2	1				**2**
		0	1	0	0			
	1	2	1					**1**
		0	1	0	0			
1	2	1						**0**

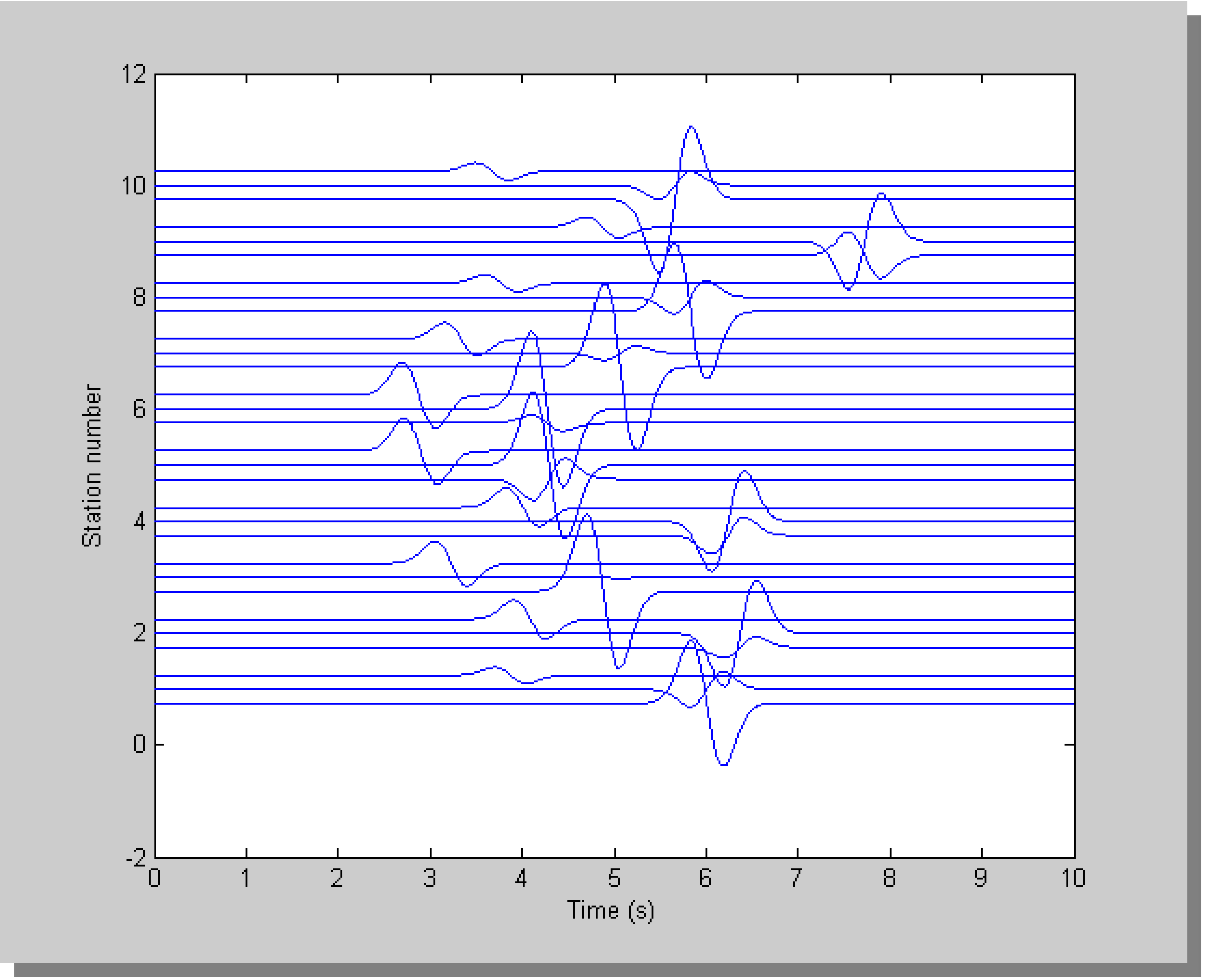
Konvolutionsmodell:
Seismogramme



Die seismische *Impuls-Antwort*

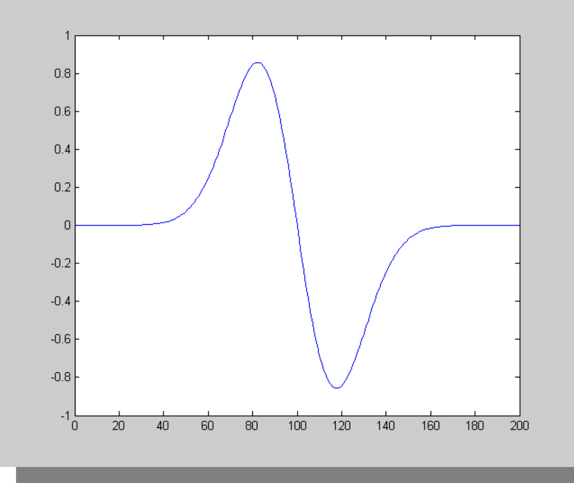


Die gefilterte (gefaltete) Antwort



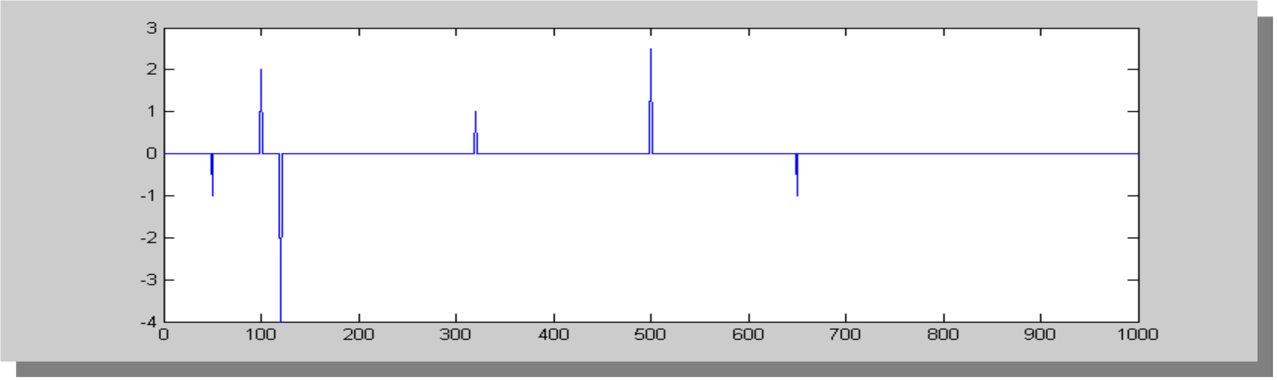
1D Konvolutionsmodell einer seismischen Spur

Das Seismogramm eines geschichteten Mediums kann ebenso mit einem Konvolutionsmodel berechnet werden ...



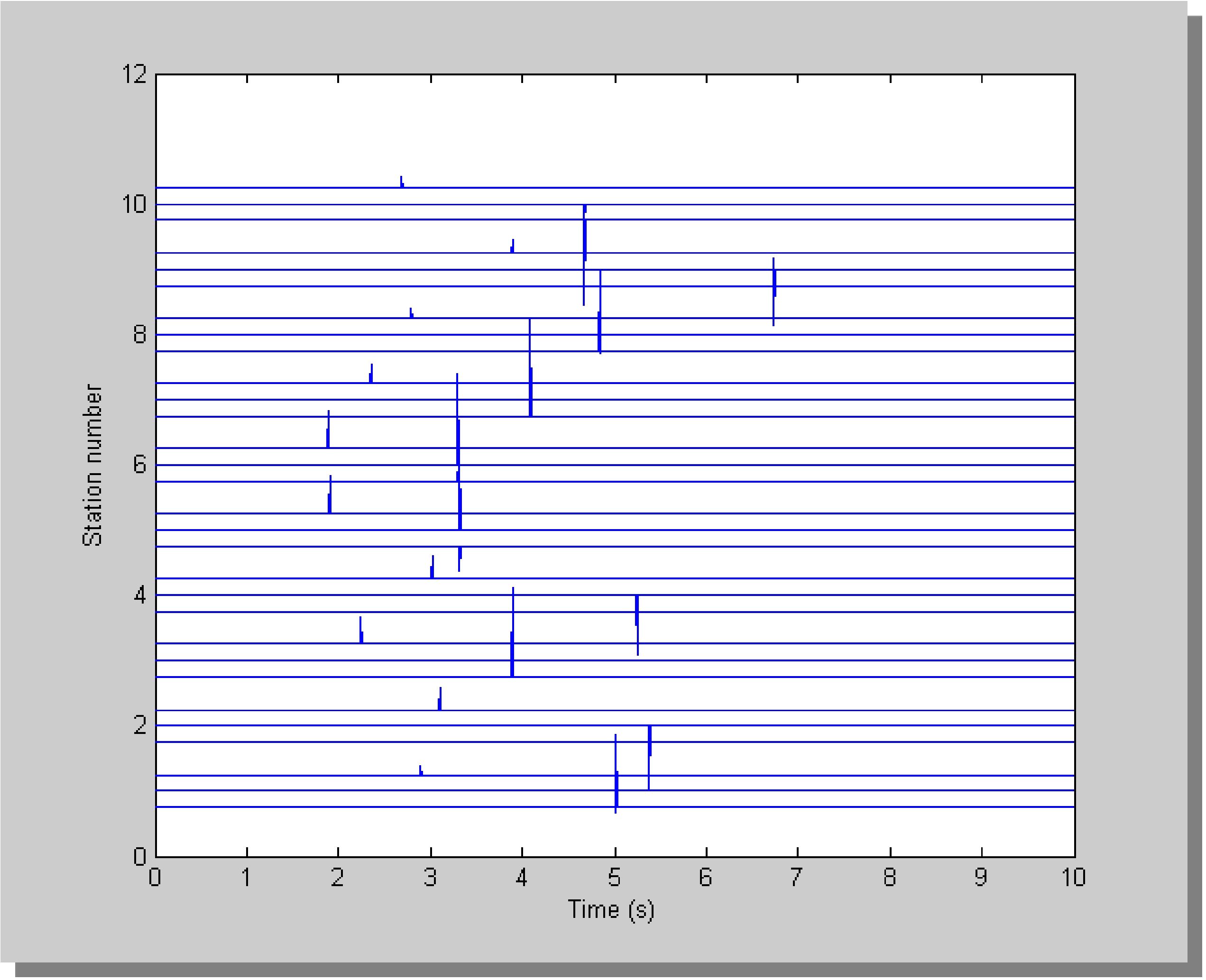
$$u(t) = s(t) * r(t) + n(t)$$

u(t)	Seismogramm
s(t)	Quellfunktion (Anregungsfunktion)
n(t)	Rauschen
r(t)	Reflektivität



Dekonvolution

Dekonvolution ist die Inversion der Konvolution.
Wann ist eine Dekonvolution nützlich?



Der Faltungssatz (Convolution theorem)

FT -> Fourier Transform

$$F(\omega) = FT\left[f(t)\right]$$

$$G(\omega) = FT\left[g(t)\right]$$

$$Y(\omega) = FT\left[y(t)\right]$$

Eine Faltung in der Zeit entspricht einer Multiplikation im Frequenzbereich (und umgekehrt)!

Zeitbereich	Spektralraum
$y(t) = g(t) * f(t)$	$Y(\omega) = G(\omega)F(\omega)$
$y(t) = g(t)f(t)$	$Y(\omega) = G(\omega) * F(\omega)$

Dieser Satz spielt für die Praxis der Zeitreihenanalyse eine wichtige Rolle!
Beispiele an der Tafel.

Korrelation

Korrelation spielt eine zentrale Rolle bei der Studie von Zeitreihen. Normalerweise gibt die Korrelation eine quantitative Abschätzung der Ähnlichkeit zweier Funktionen und den zeitlichen/räumlichen Versatz zwischen ihnen an. Die Korrelation zwischen den Vektoren g und f (beide mit n Elementen) ist definiert durch:

$$r_k = \sum_{i=1}^{n} f_{k+i} g_i$$

$$k = -m, \ldots, 0, \ldots, m$$

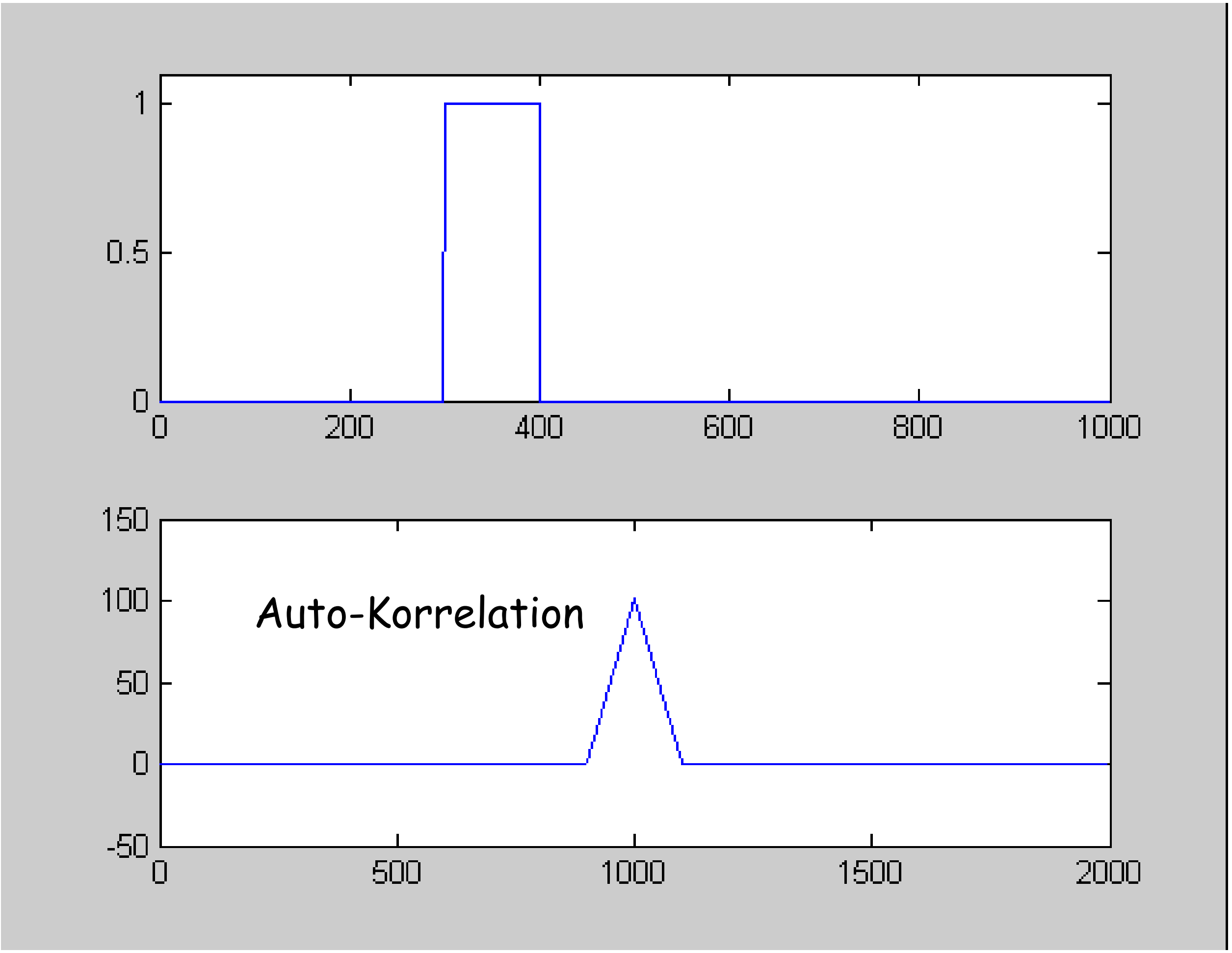
$$m = n - 1$$

m nennt man auch max lag (Verzögerung)

Beispiel (Matlab)

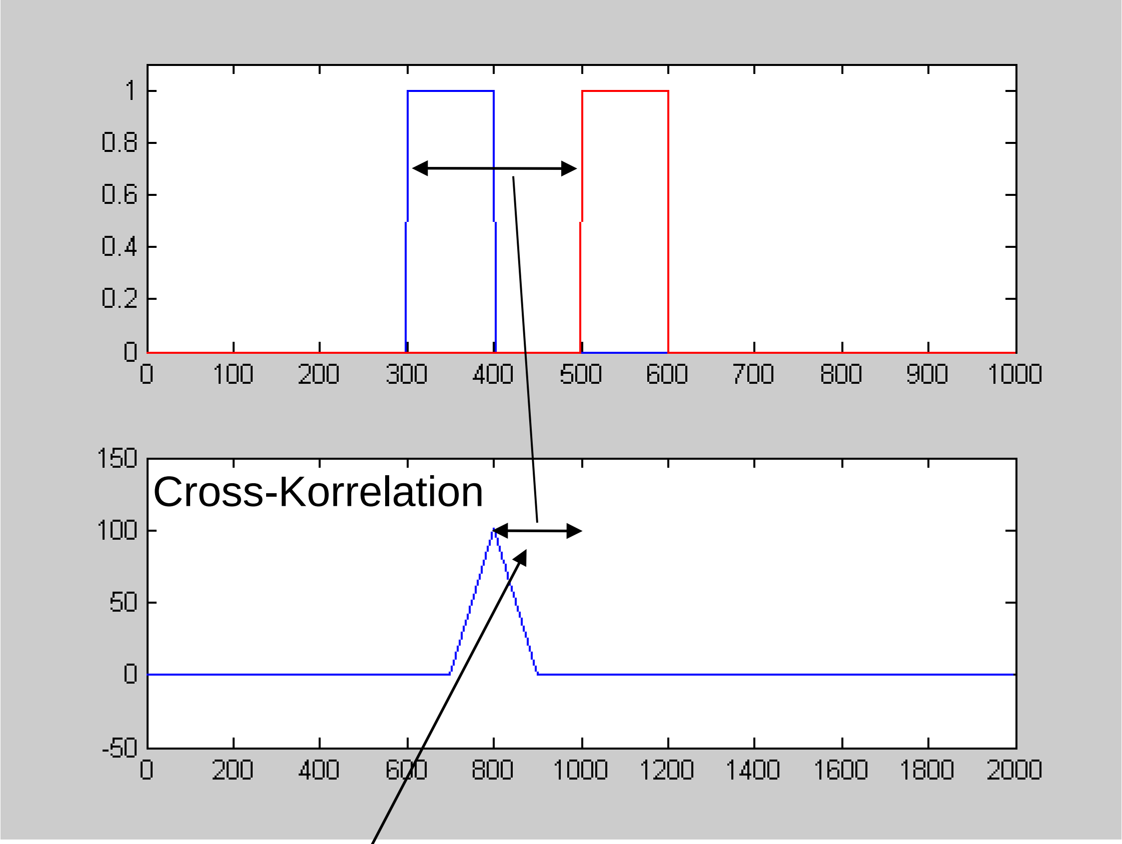
```
>> x=[1 3  2]
x =
     1     3     2
>> y=[1  2 1]
y =
     1     2     1
>> xcorr(x,y)
ans =
    1.0000    5.0000    9.0000    7.0000    2.0000
>>
```

Auto-Korrelation



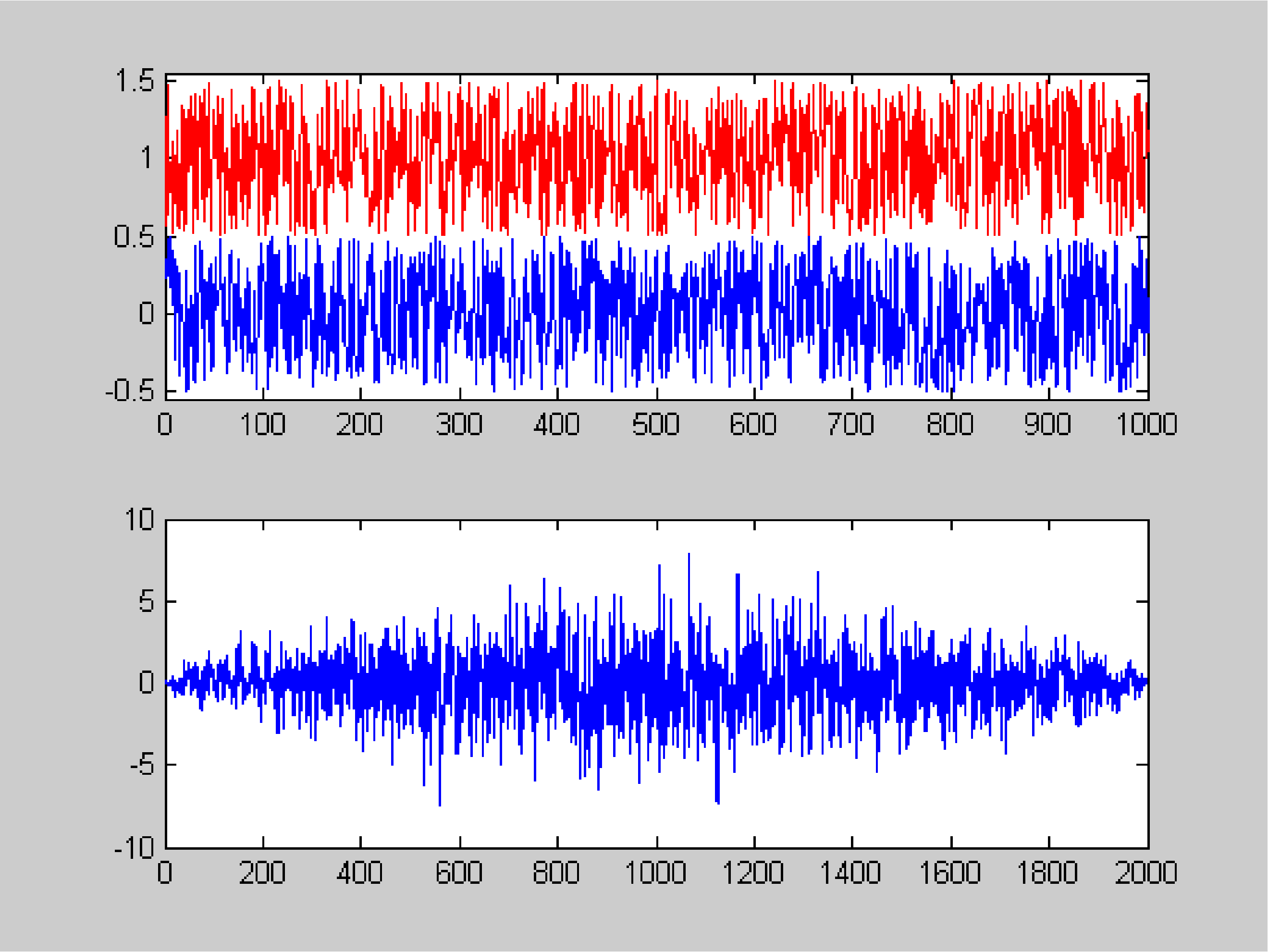
Für einen Vektor der Länge n hat die Korrelation die Länge 2n-1. Bei der Autokorrelation ist das Maximum bei n (perfekte Übereinstimmung)

Kreuz-Korrelation



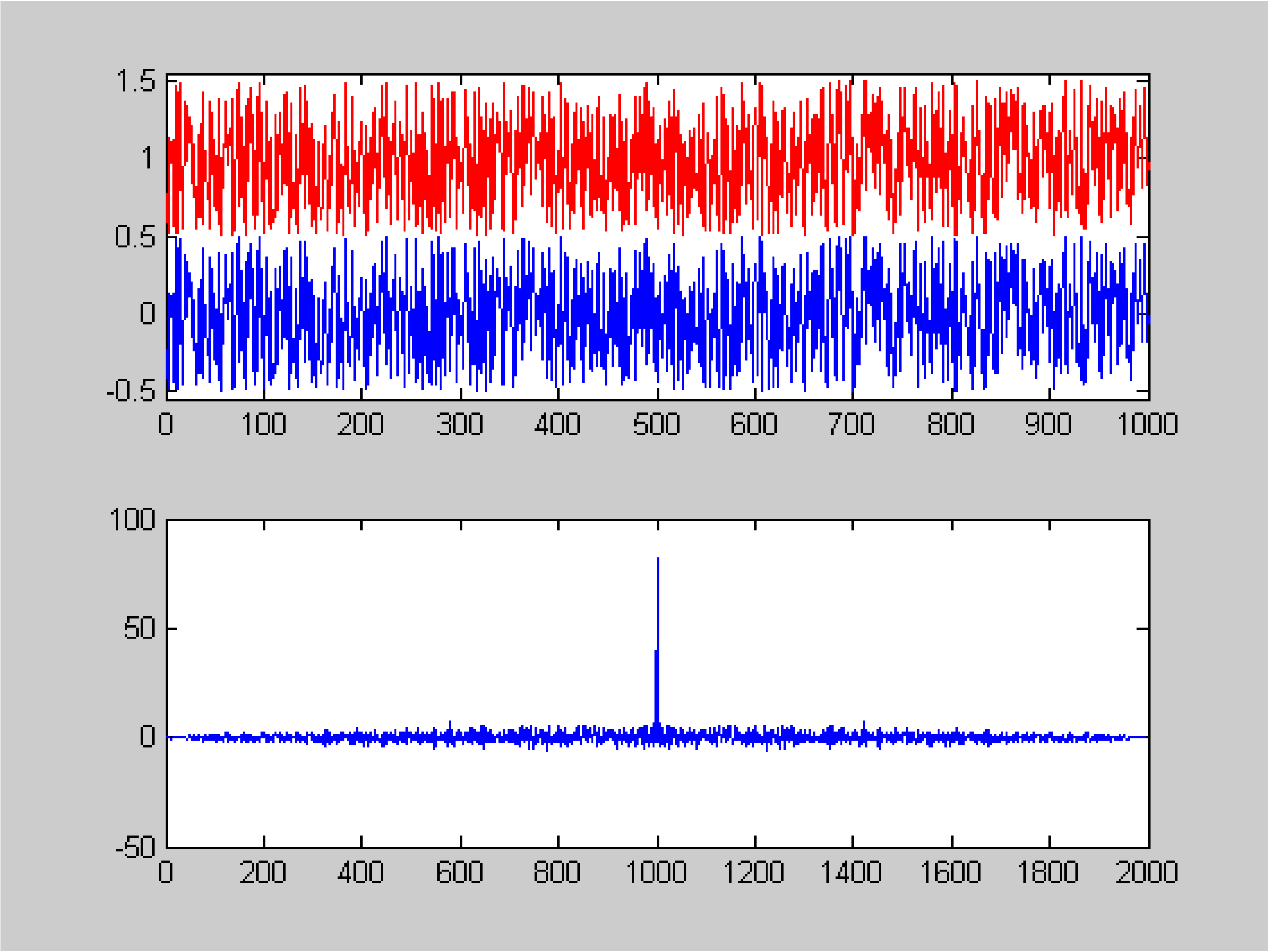
Lag (in diesem Fall 200) zwischen zwei Funktionen

Kreuz-Korrelation
Zufallsfunktionen



Korrelation zwei verschiedener Zufallszeitreihen

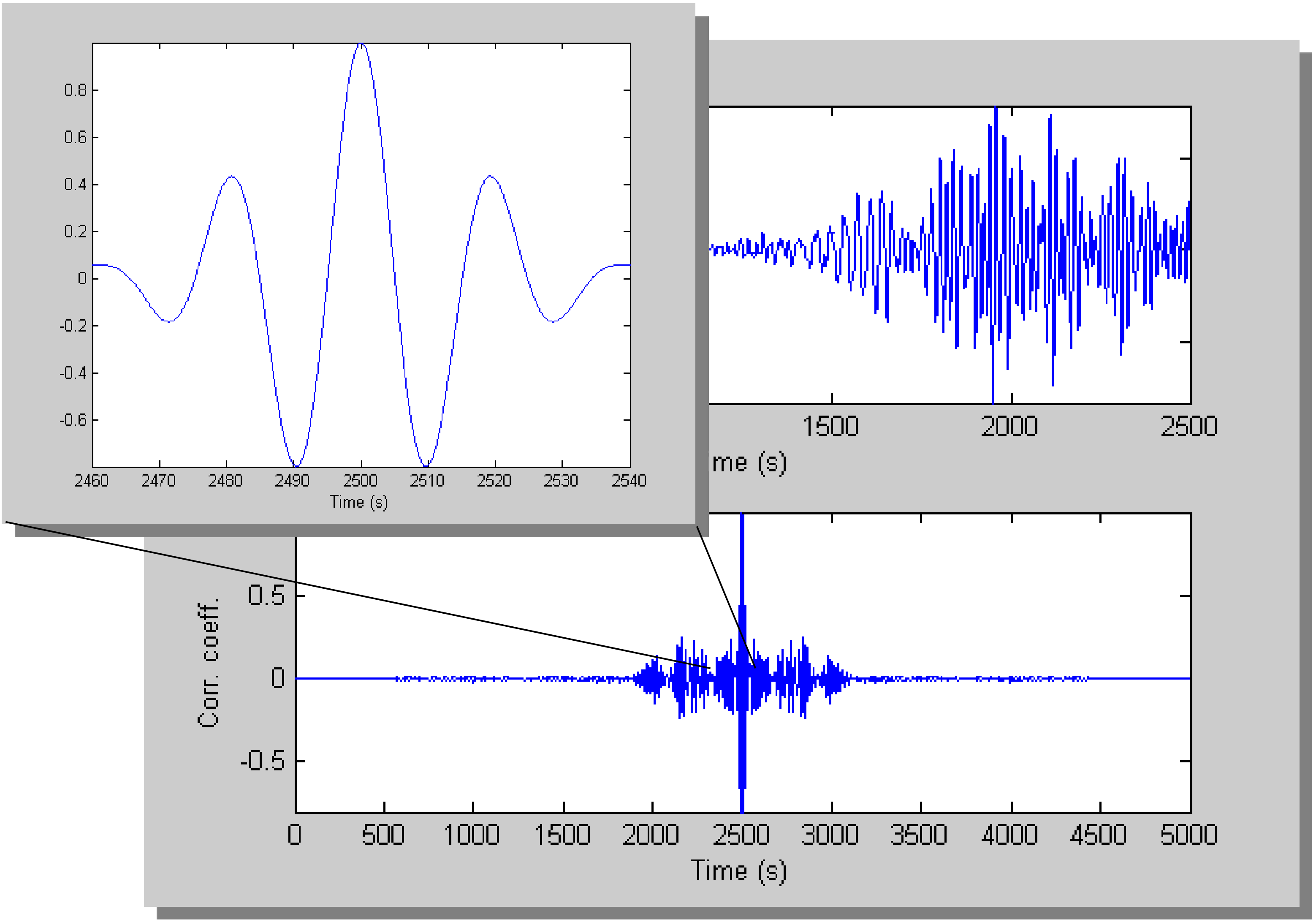
Auto-Korrelation
Zufallsfunktion



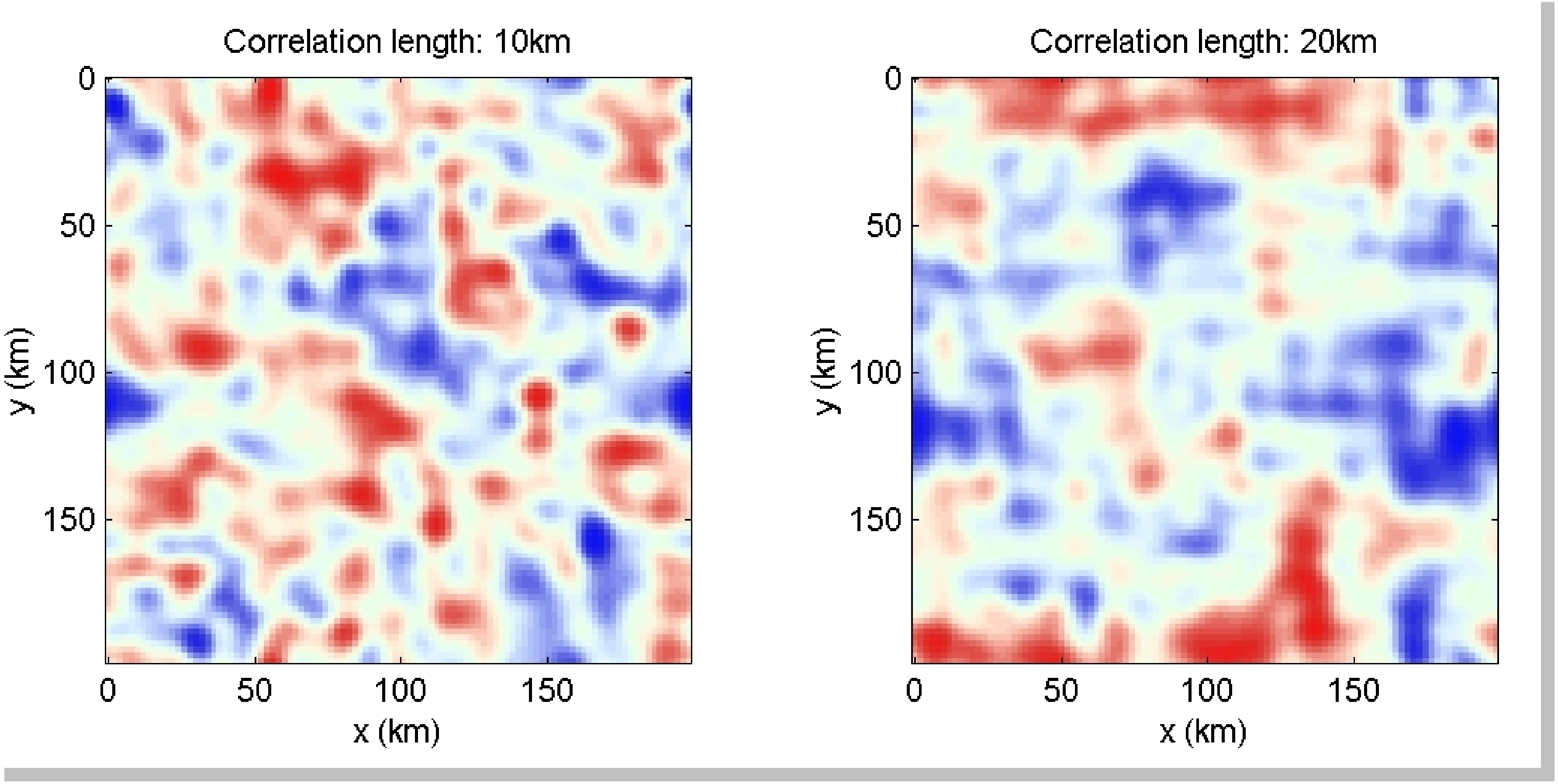
Korrelation zwei gleicher Zufallszeitreihen -> „Deltafunktion“

Auto-Korrelation

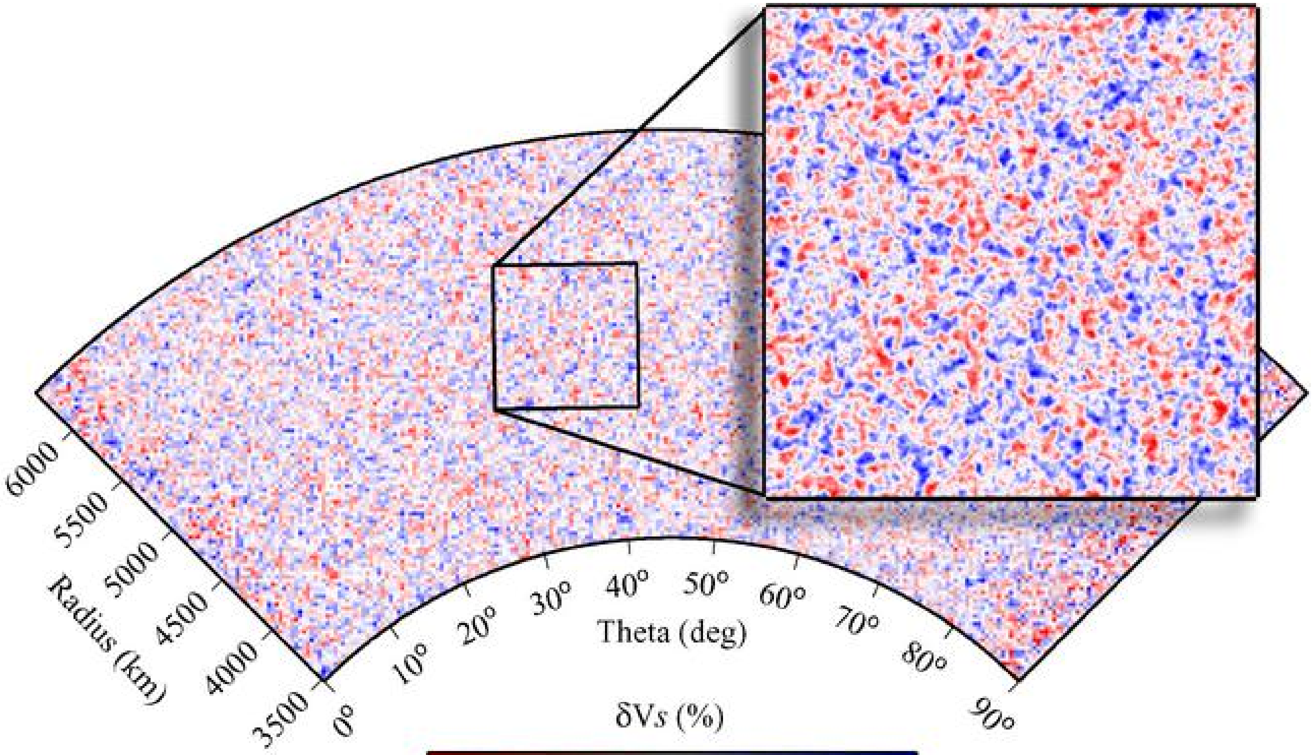
Seismisches Signal



Korrelationslänge
„Zufallsmedium“



Korrelationslänge
„Zufallsmedium“



Exponential autocorrelation function. autocorrelation wavelength 32 km.
RMS S-wave velocity perturbation 1%.

Der Korrelationskoeffizient

Der Korrelationskoeffizient Kor(X,Y) ist eine Zahl zwischen -1 und 1, welche die Ähnlichkeit zweier Funktionen X und Y beschreibt.
Es gilt zum Beispiel:

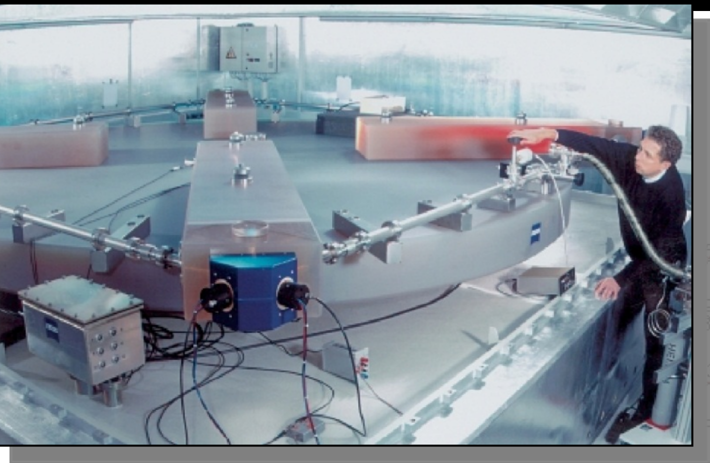
Für beliebiges X
Kor (X,X) = 1
Kor(X,-X) = -1 (Anti-korrelation)

Kor(X,Y) << 1 wenn X,Y unabhängige Zufallsfunktionen sind

Korr(X,Y) = 1 wenn X und Y identisch

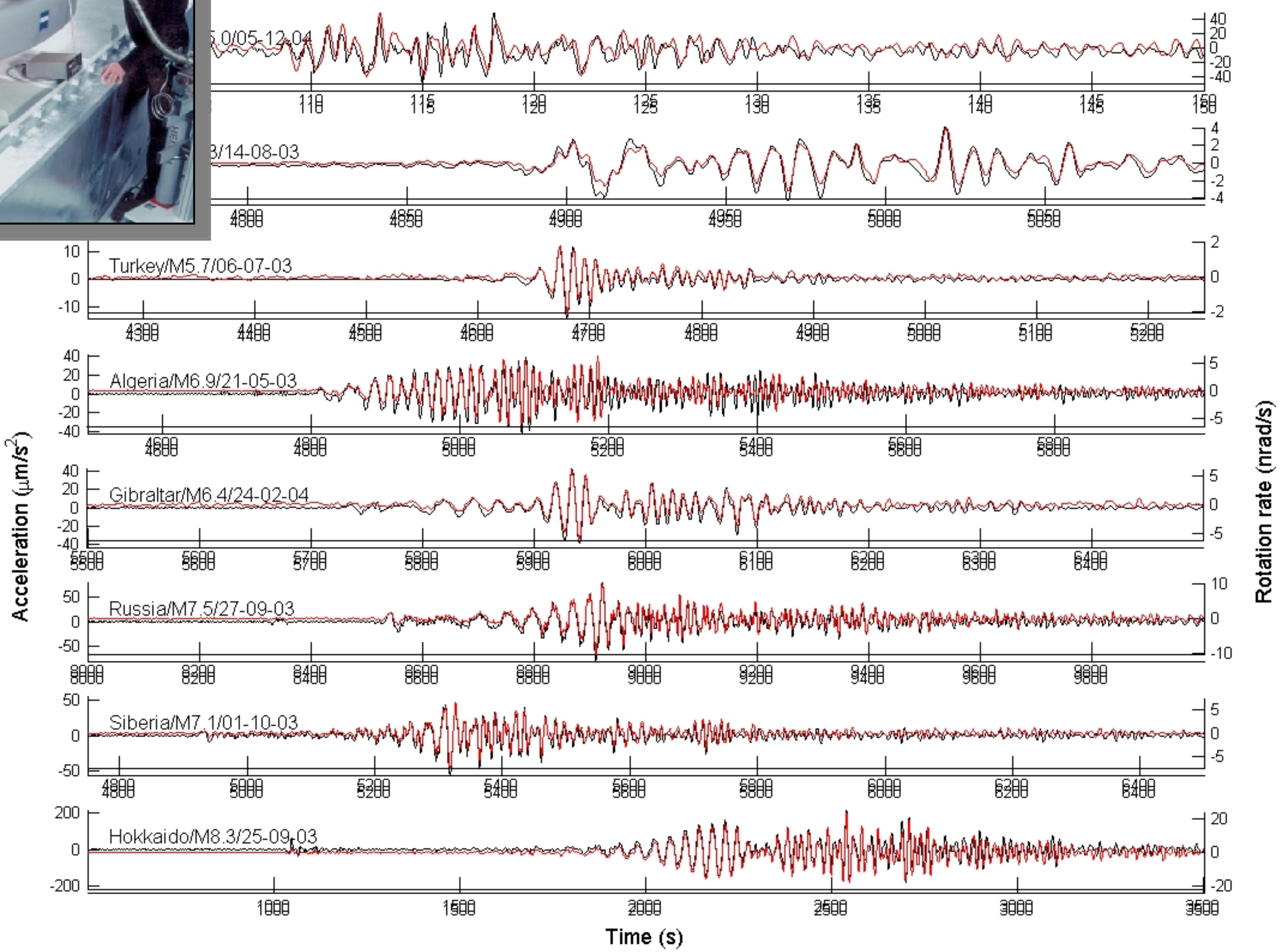
Ein Kor nahe 1 KANN einen kausalen Zusammenhang zwischen Phänomenen bedeuten (z.B. Regen -> Grundwasserspiegel; Regen -> Erdbeben; Sonnenflecken -> Klima)

Ähnlichkeit Rotationsrate und transversale Beschleunigung



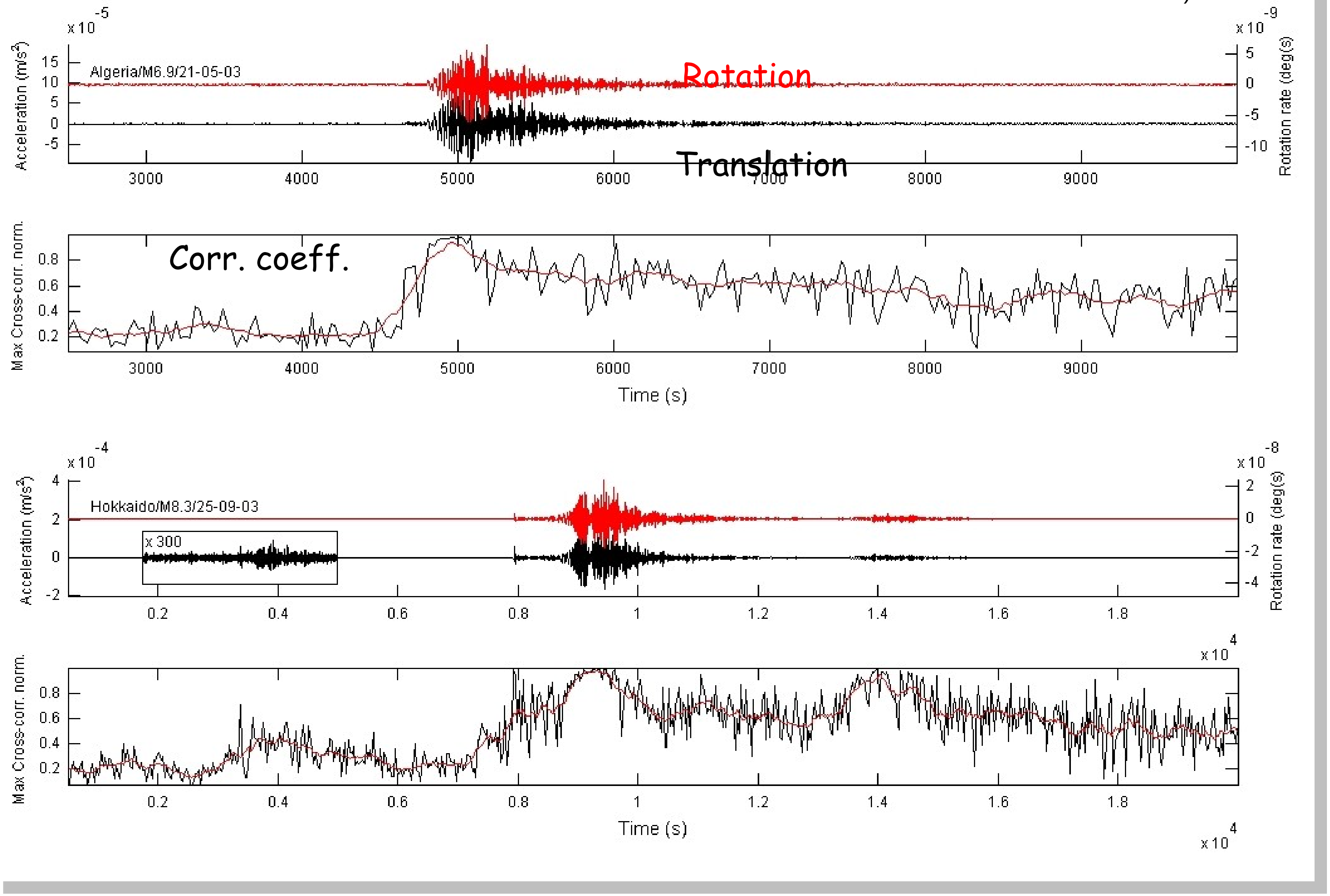
Ring laser in Wettzell

Ringlaser Rotation – Seismogramm Beschleunigung



Kreuz-Korrelation
ein Beispiel – “Ähnlichkeit”

Der Korrelationskoeffizient ist in einem Zeitfenster entlang der Zeitreithe (ca 2T $_{\text{dominant}}$) berechnet



Correlation: Solar forcing of climate?

Contents lists available at ScienceDirect

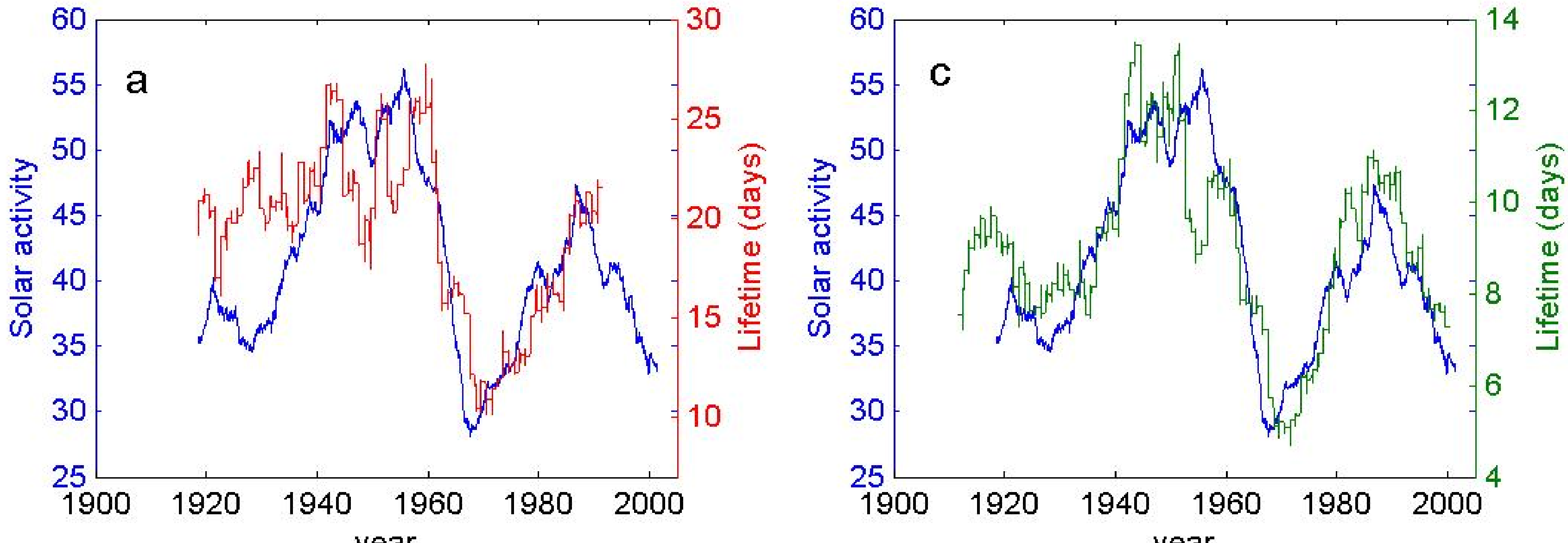
Journal of
Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jastp

Evidence for solar forcing in variability of temperatures and pressures in Europe

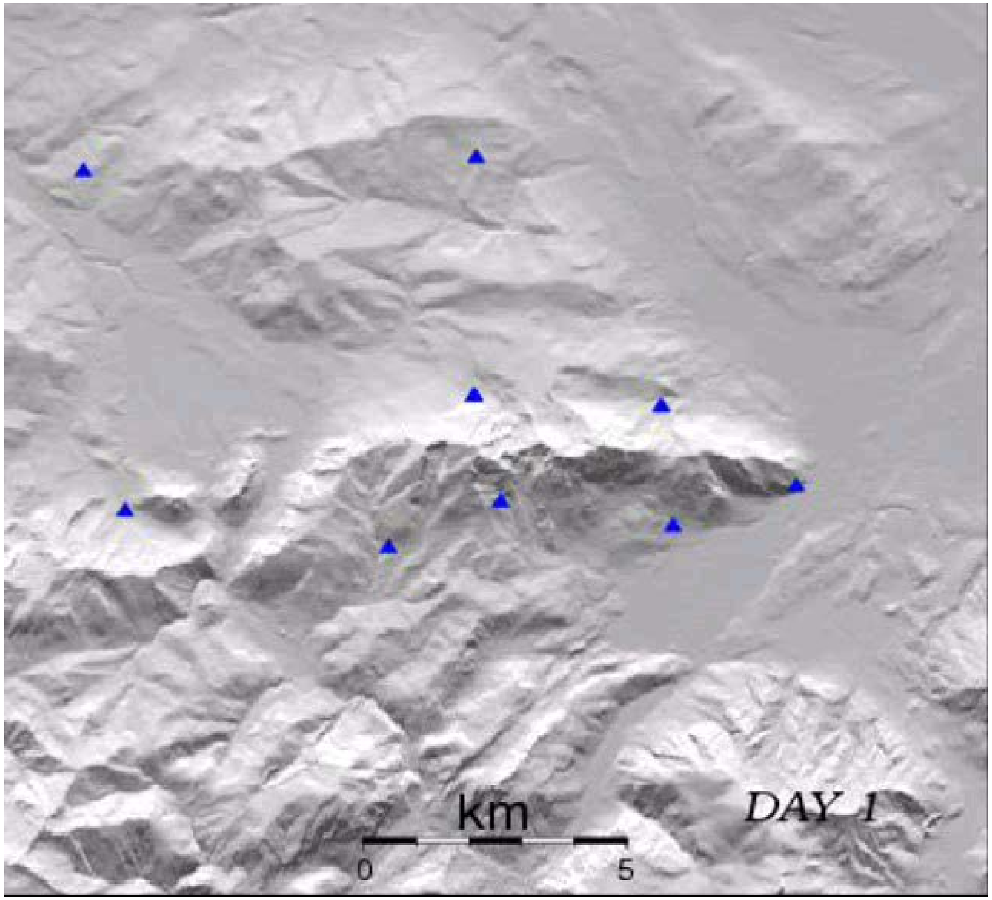
Jean-Louis Le Mouël[a], Elena Blanter[a,b], Mikhail Shnirman[a,b], Vincent Courtillot[a,*]

[a] Institut de Physique du Globe de Paris, Place Jussieu, Paris, France
[b] International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Moscow, Russia

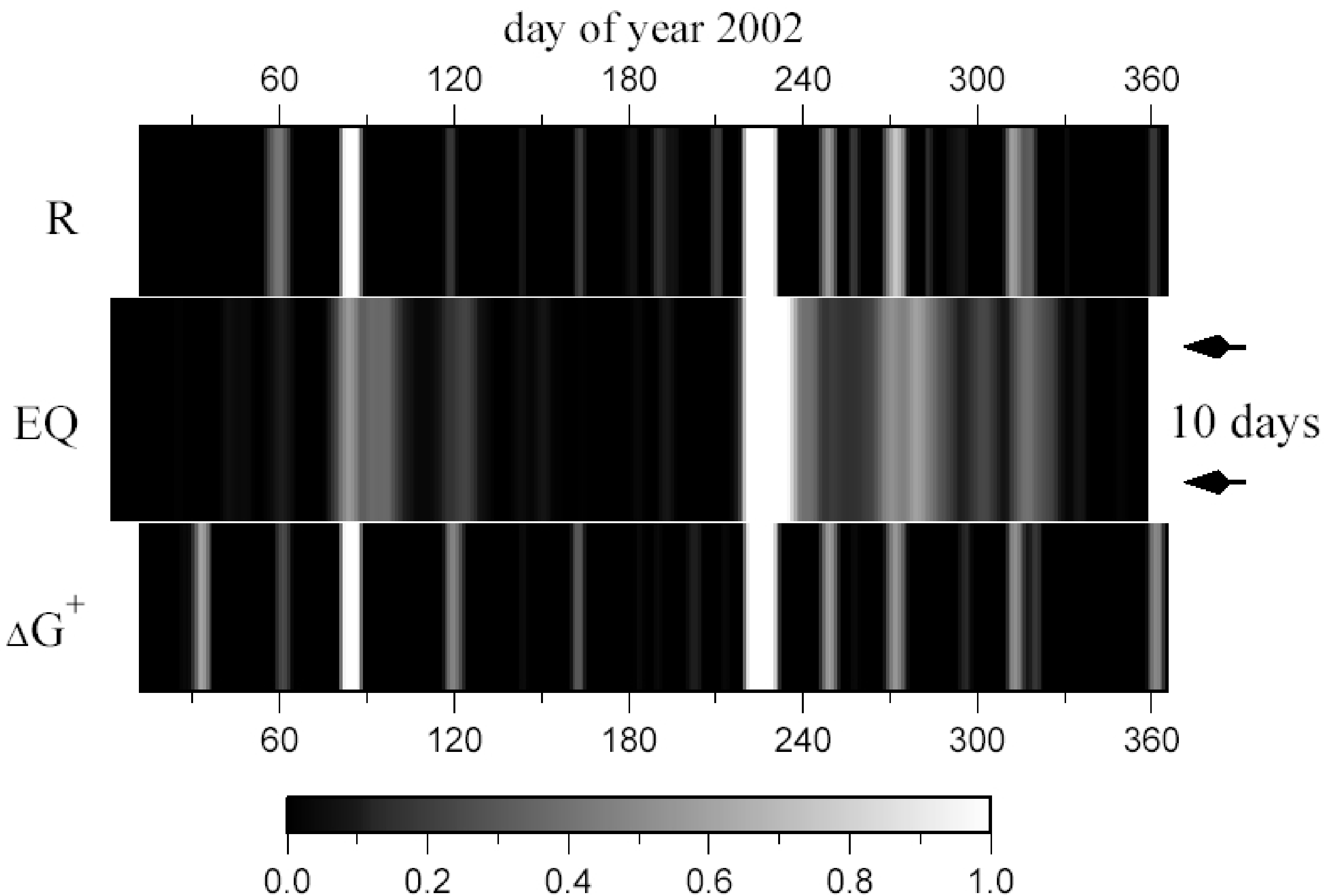


Seismizität 2002

... Die Regenfälle, die im August zum Hochwasser führten, hatten ihren Höhepunkt am Tag 218 ...

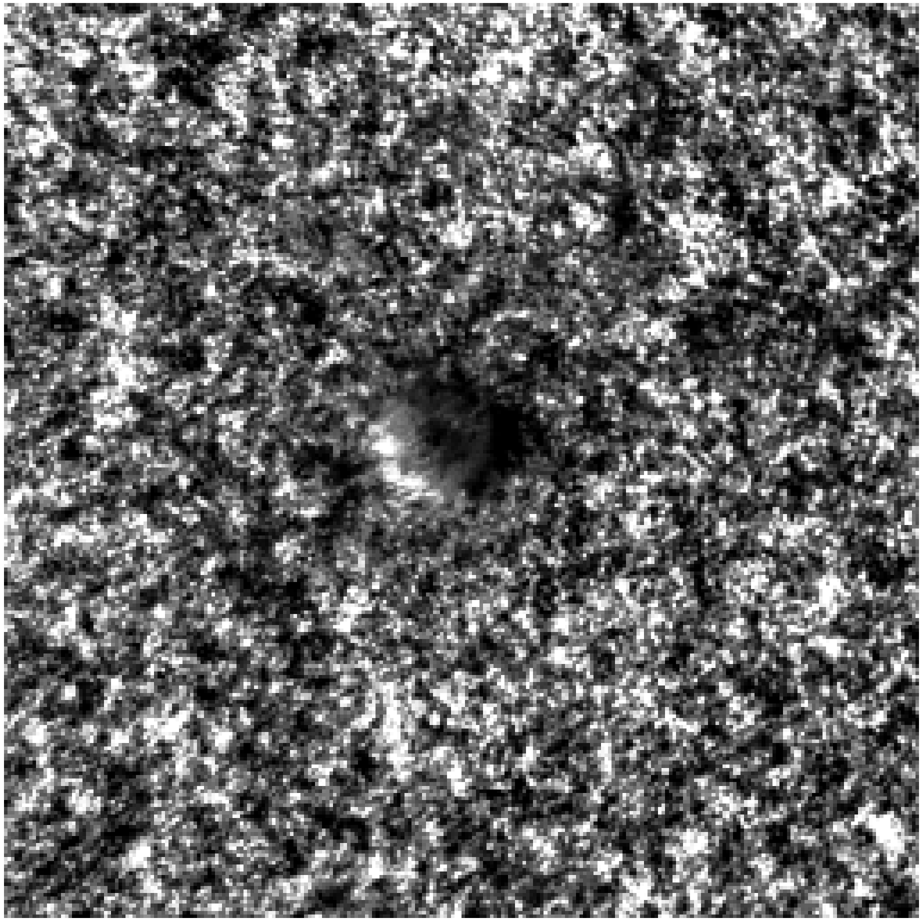


Externer Einfluss auf Erdbeben?

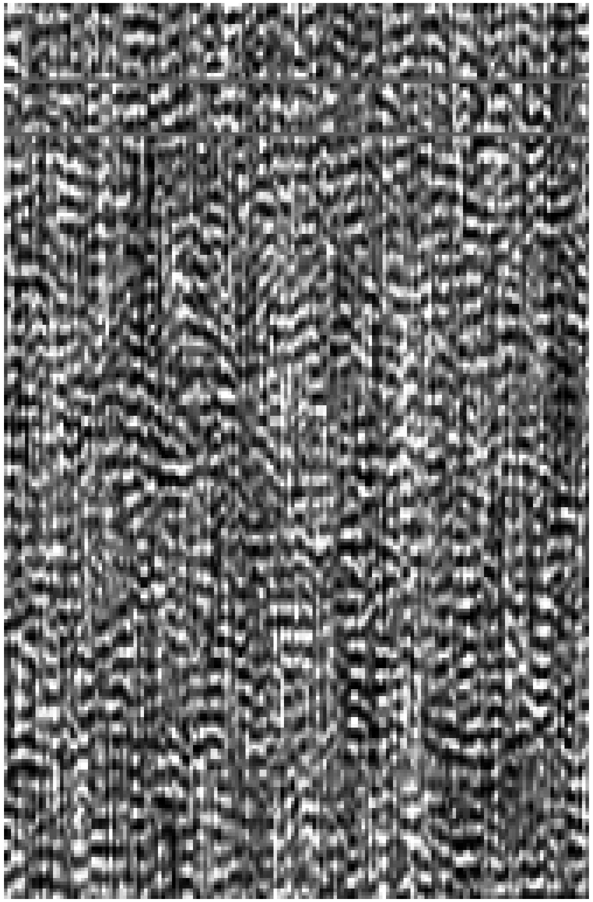


Die Power der Korrelationsanalyse: Helioseismologie

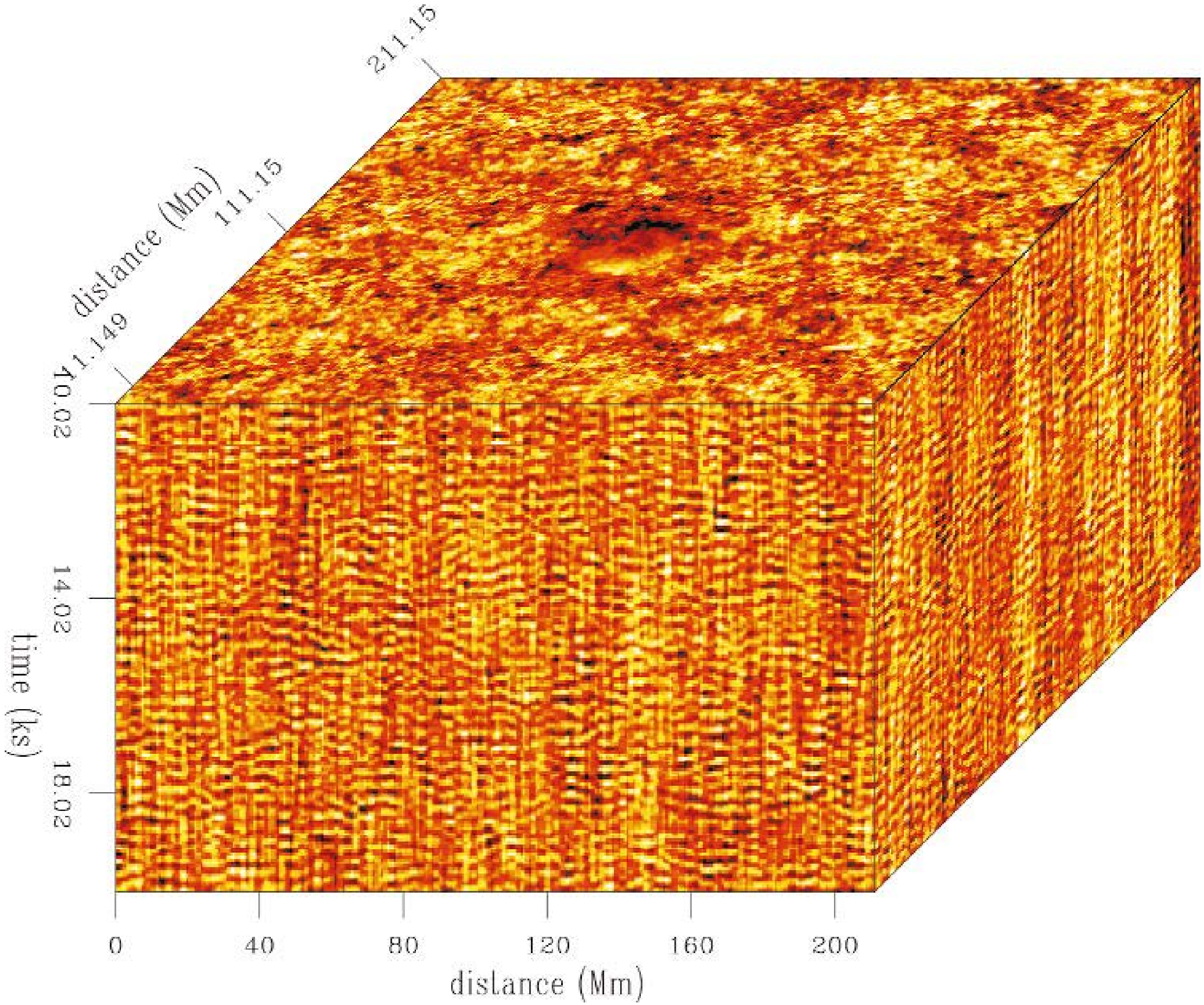
Sonnenflecken Helligkeit



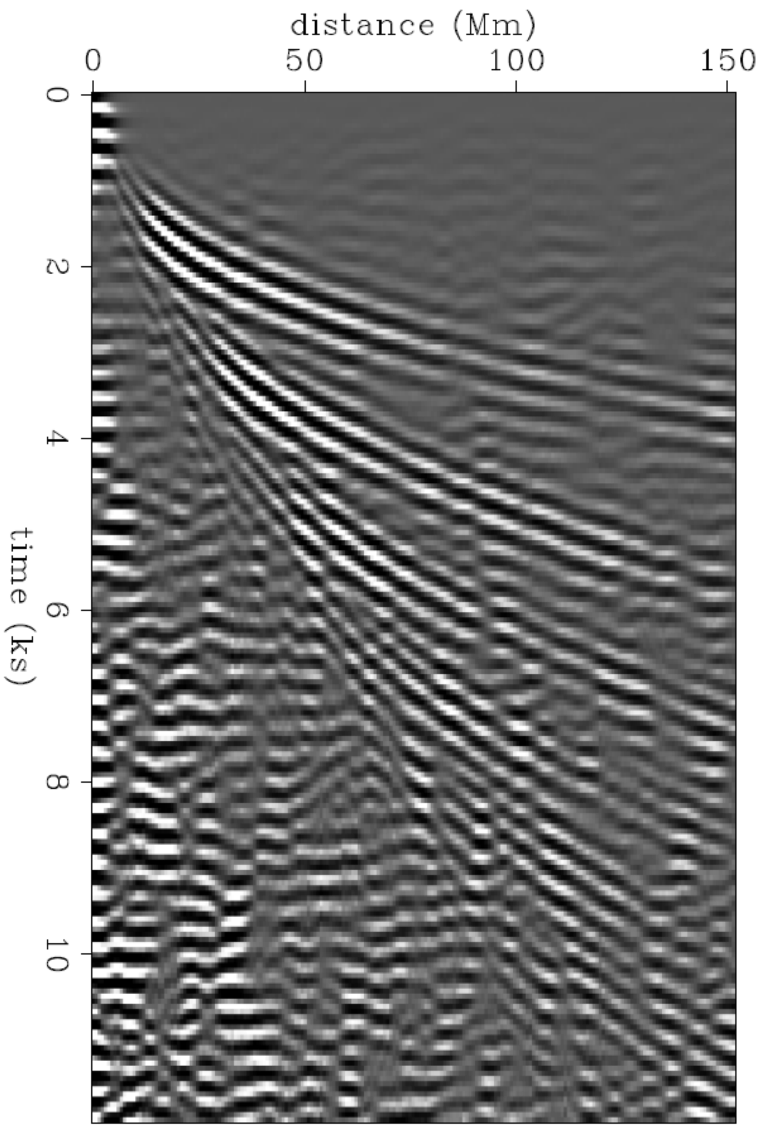
Helligkeitszeitreihen

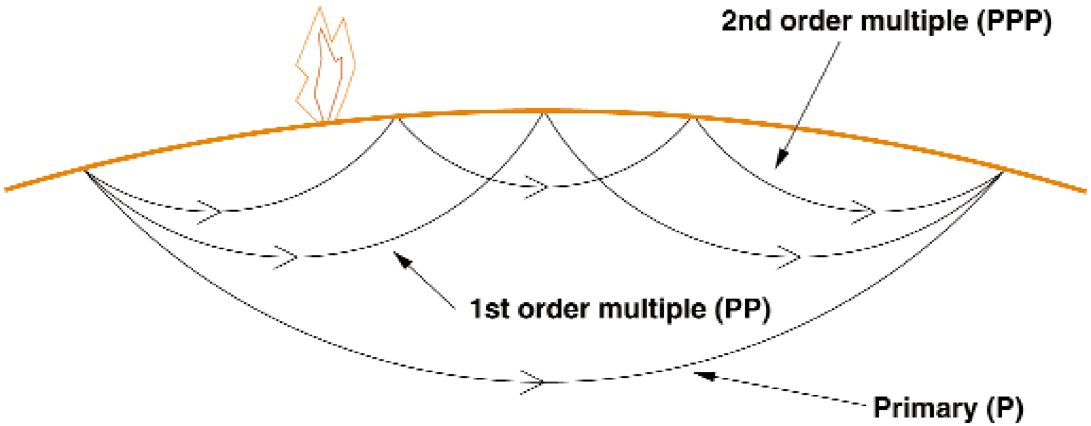


2-D + Zeit Helligkeitsdaten



Sonnenseismogramme aus Rausch-Korrelationen

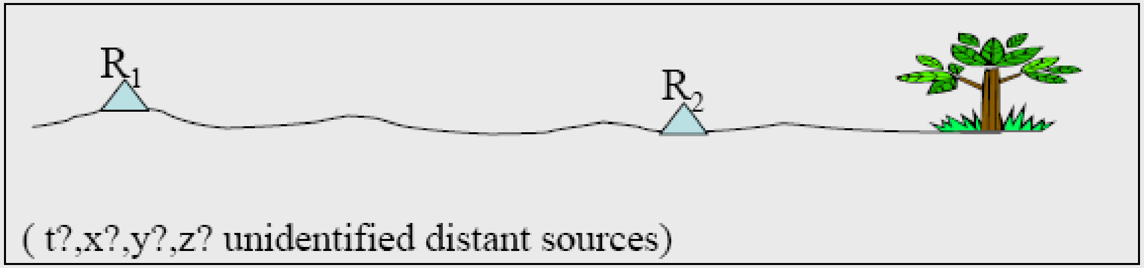




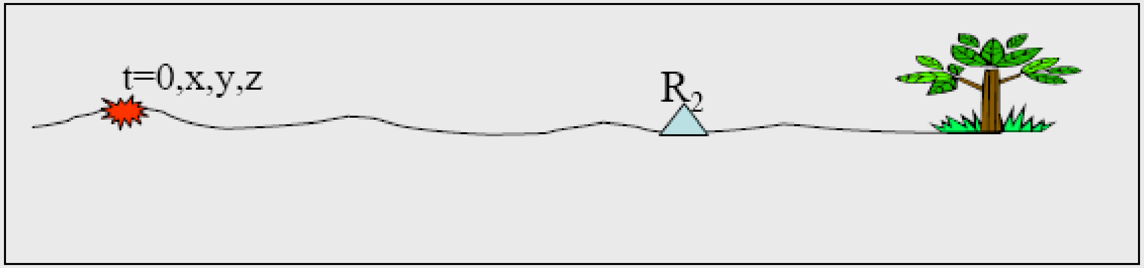
Principle of noise correlations

Taking advantage of the correlation properties of diffuse fields towards the empirical reconstruction of seismograms without source

With this (real) passive experiment:

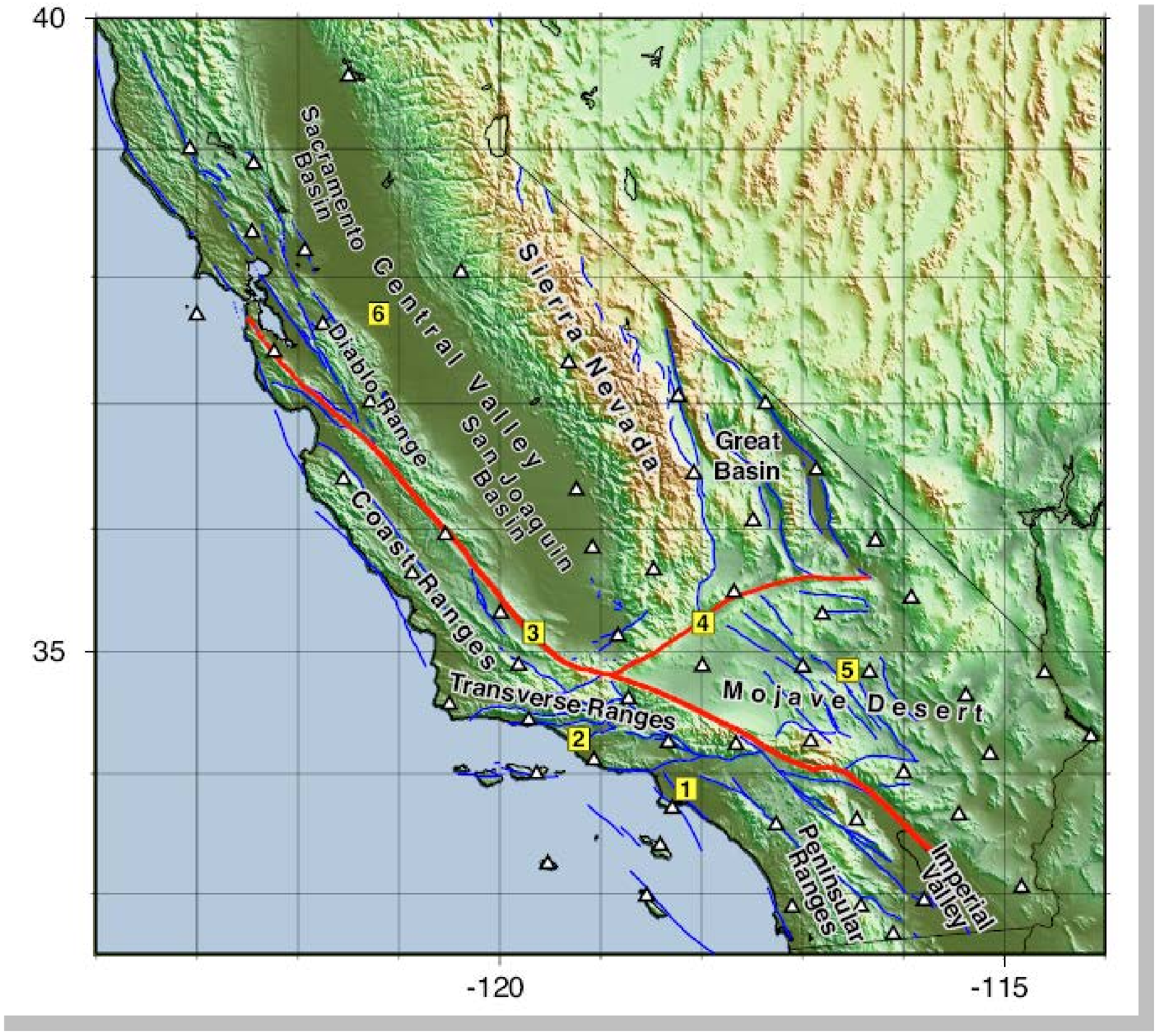


we want to find the result of that (ideal) active one

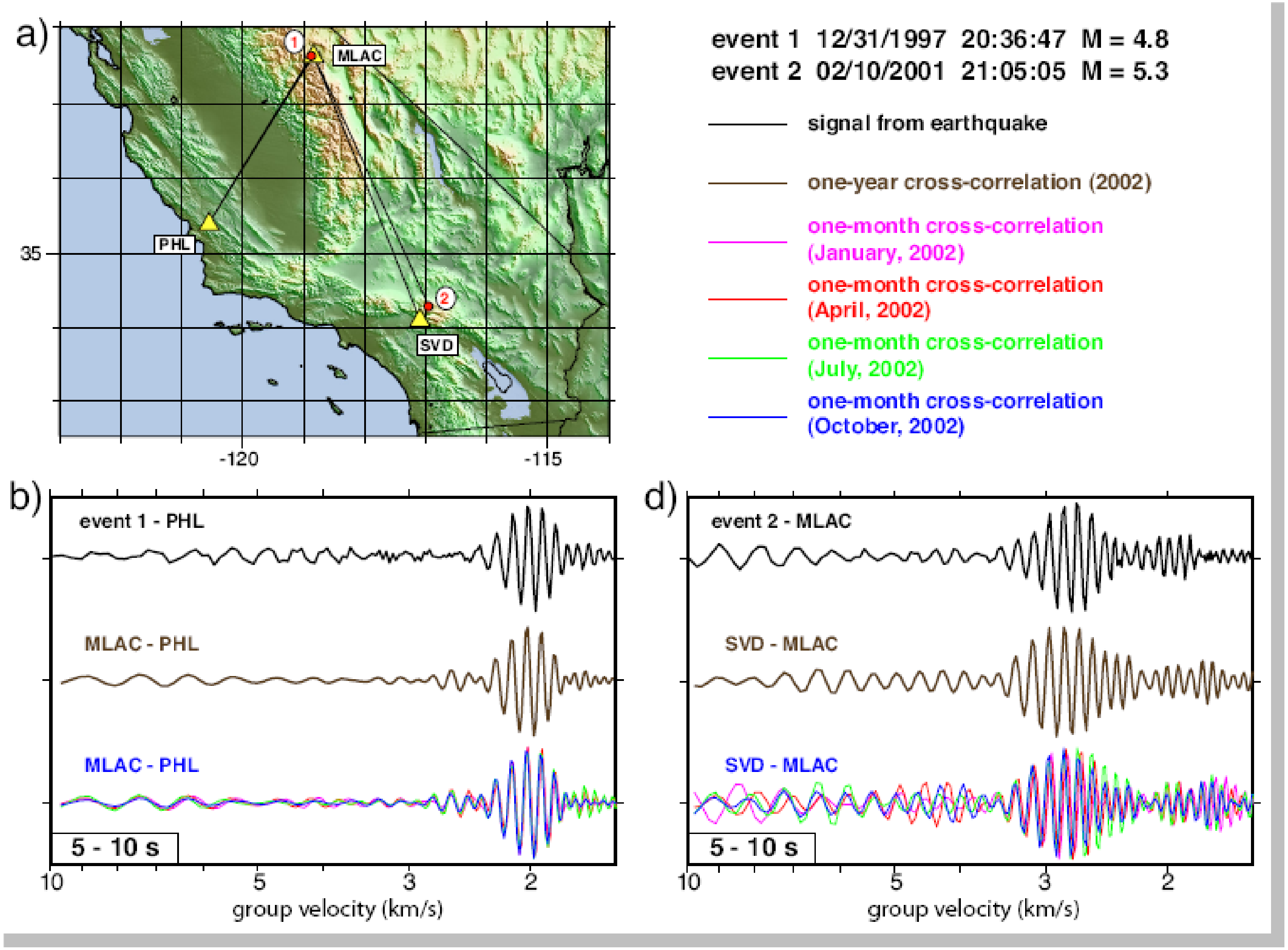


Limitations of the technique?

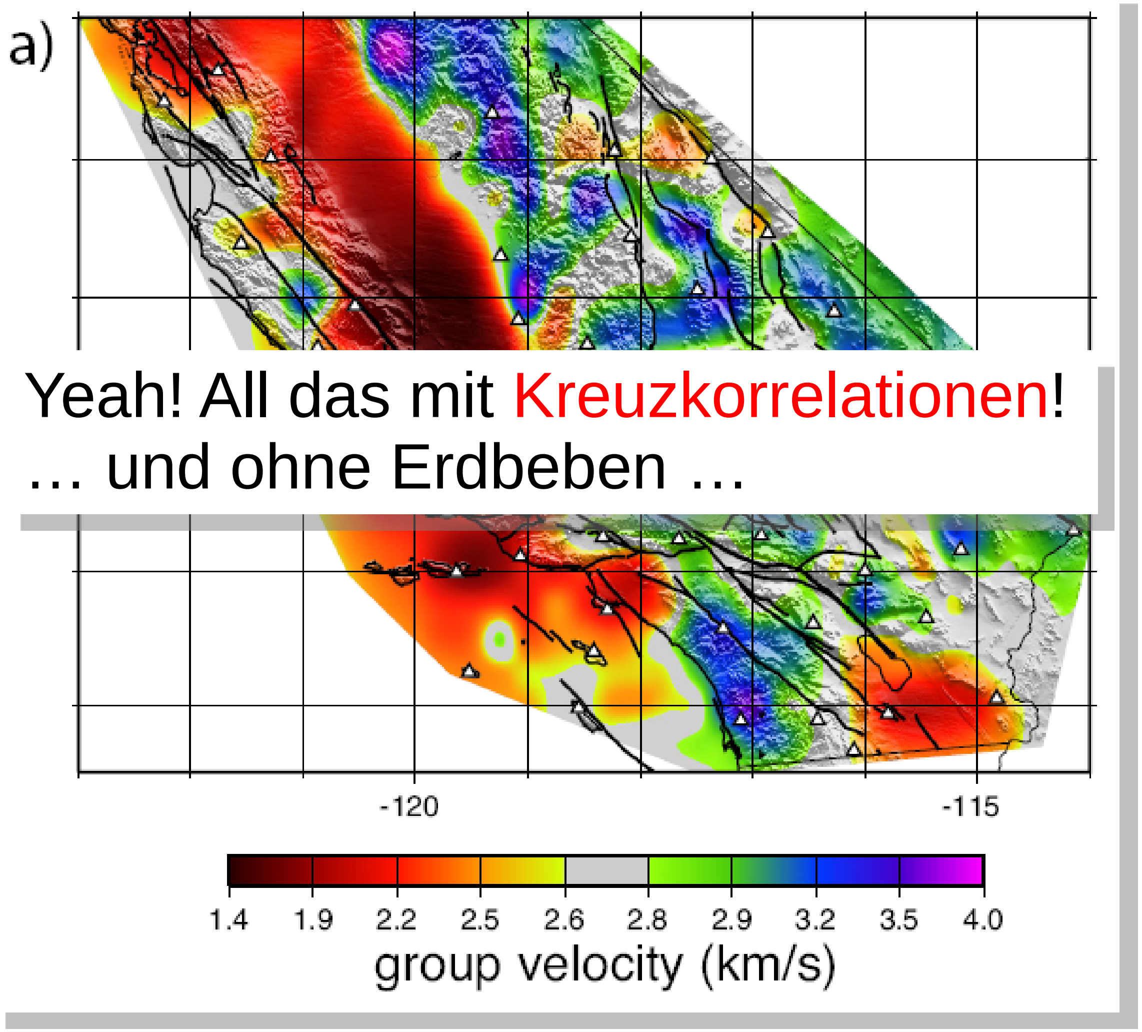
Tomografie mit Kreuzkorrelation



Green's Funktionen aus 1 Jahr „Rauschen“: Vergleich mit Erdbeben (Shapiro et al., Science, 2005)



Tomografie von Kalifornien
7.5 s Rayleigh Wellen



Yeah! All das mit Kreuzkorrelationen!
… und ohne Erdbeben …

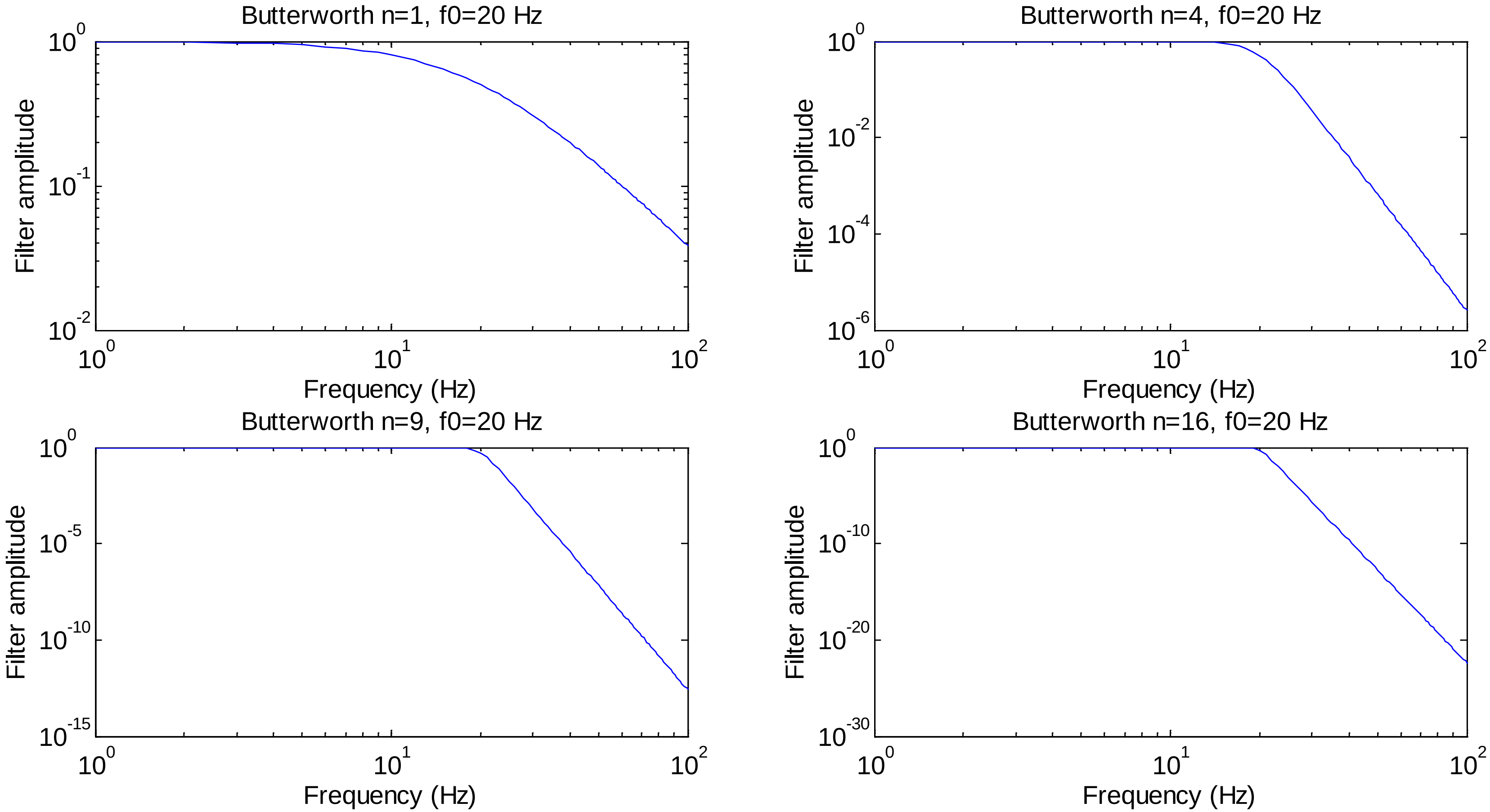
Digitales Filtern

Oftmals beinhaltet ein aufgezeichnetes Signal eine Fülle von Informationen, an denen wir nicht interessiert sind (Rauschen, Störsignale). Um uns des Rauschens zu entledigen fügen wir einen Filter im Frequenzraum hinzu.

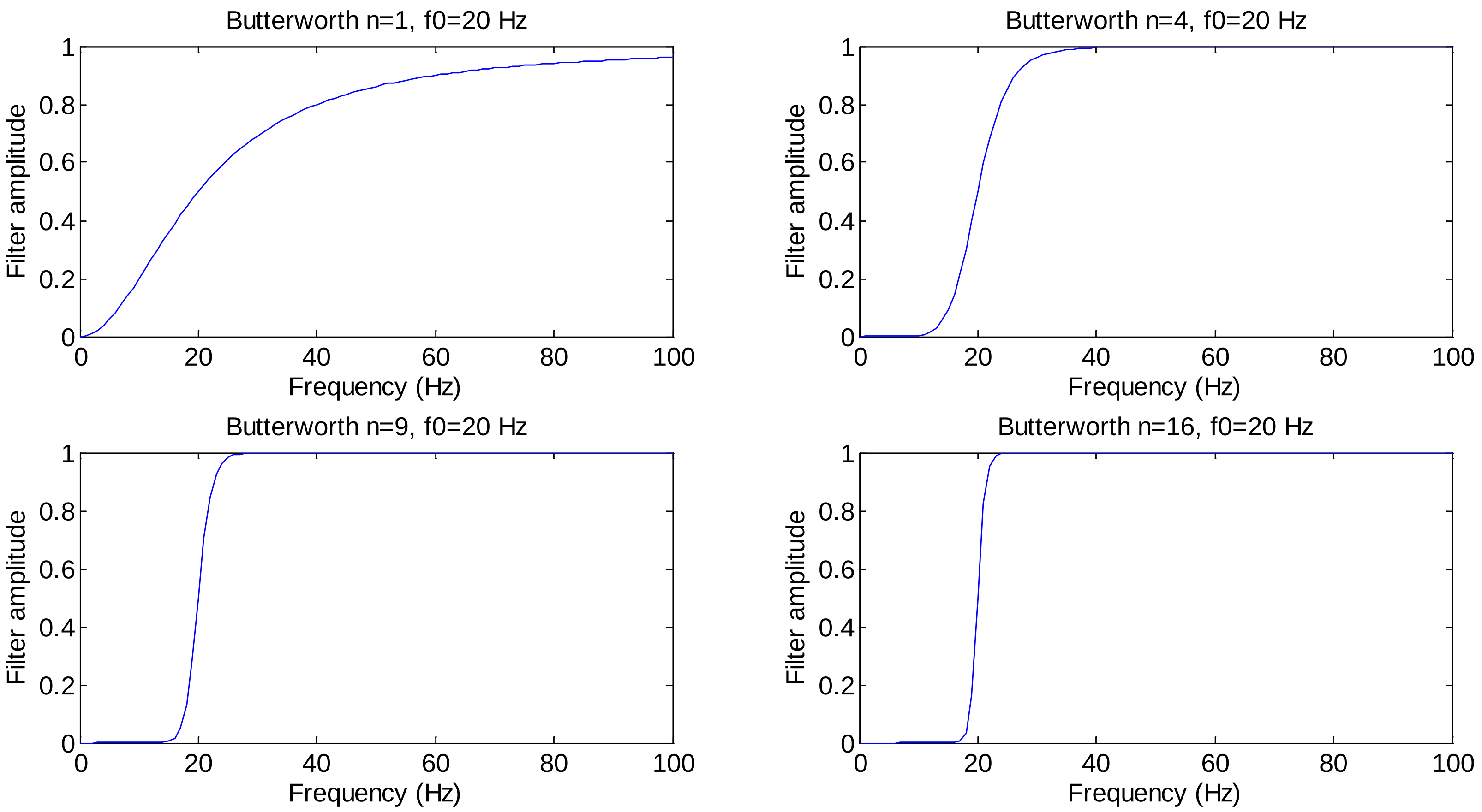
Die wichtigsten Filter sind:

- Hochpass: schneidet niedrige Frequenzen ab
- Tiefpass: schneidet hohe Frequenzen ab
- Bandpass: schneidet hohe und tiefe Frequenzen heraus, und hinterlässt ein Band von mittleren Frequenzen
- Bandfilter: schneidet bestimmte Frequenzen heraus und hinterlässt alle anderen Frequenzen

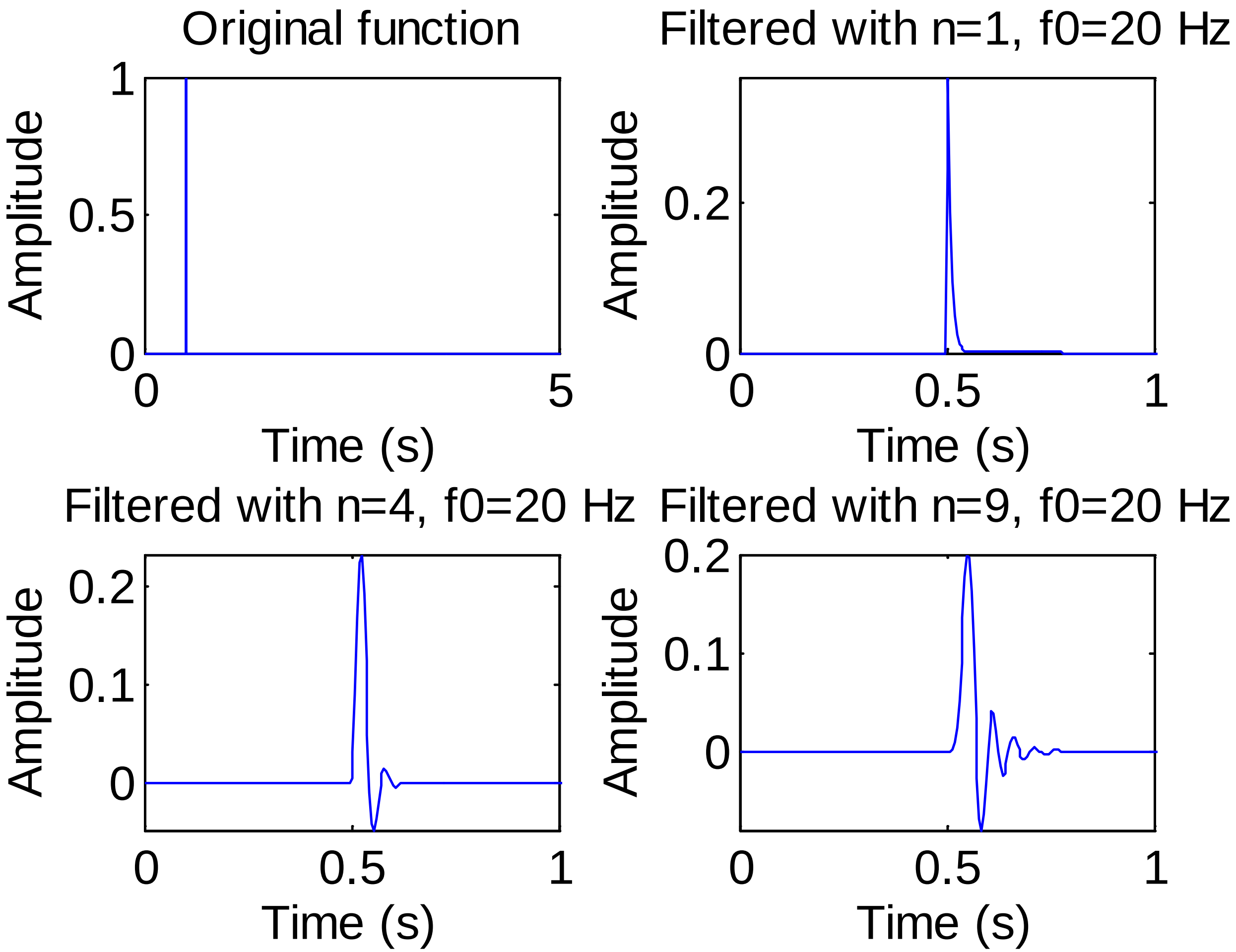
Typischer Tiefpassfilter (Butterworth)



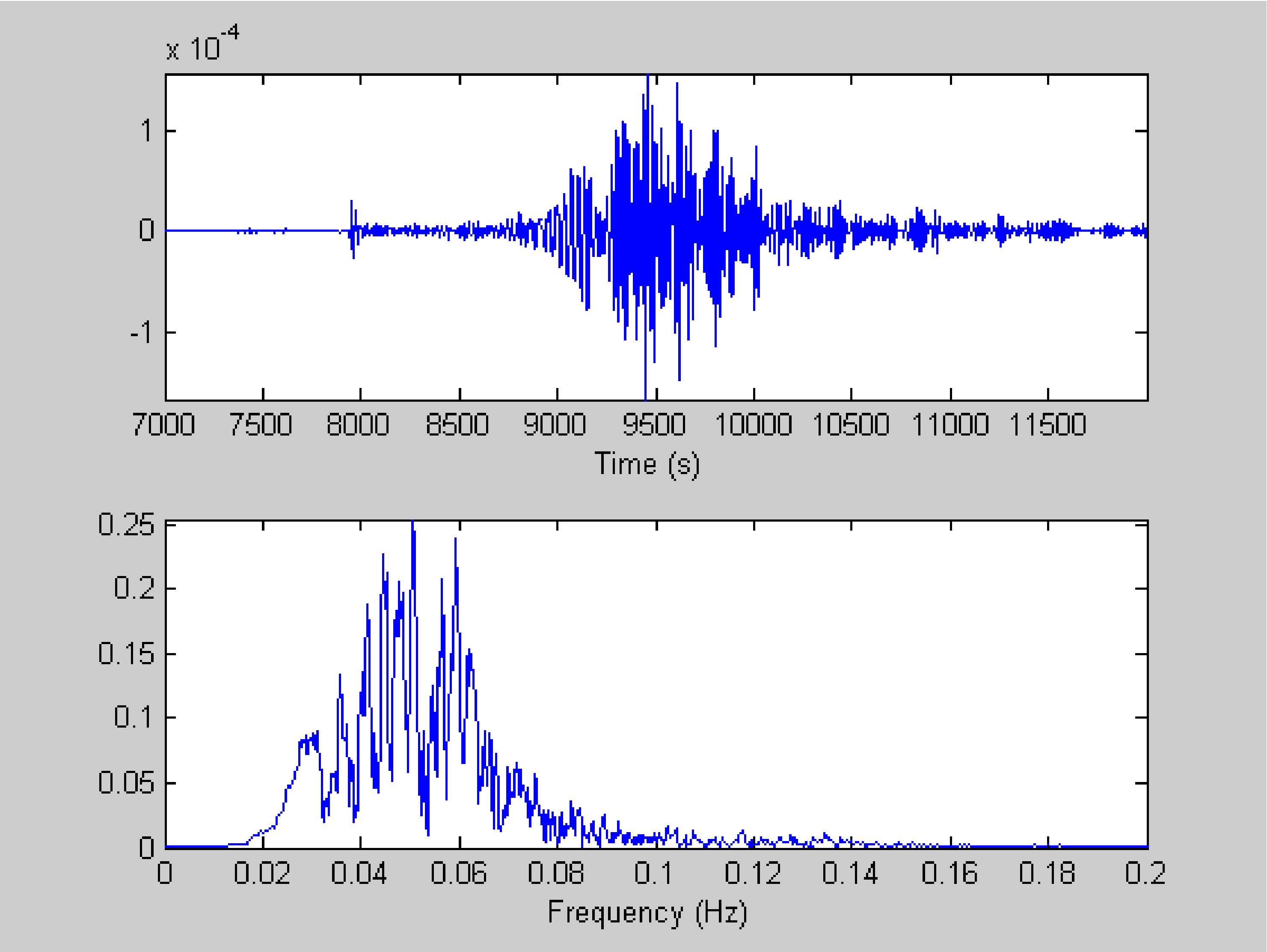
Typischer Hochpassfilter (Butterworth)



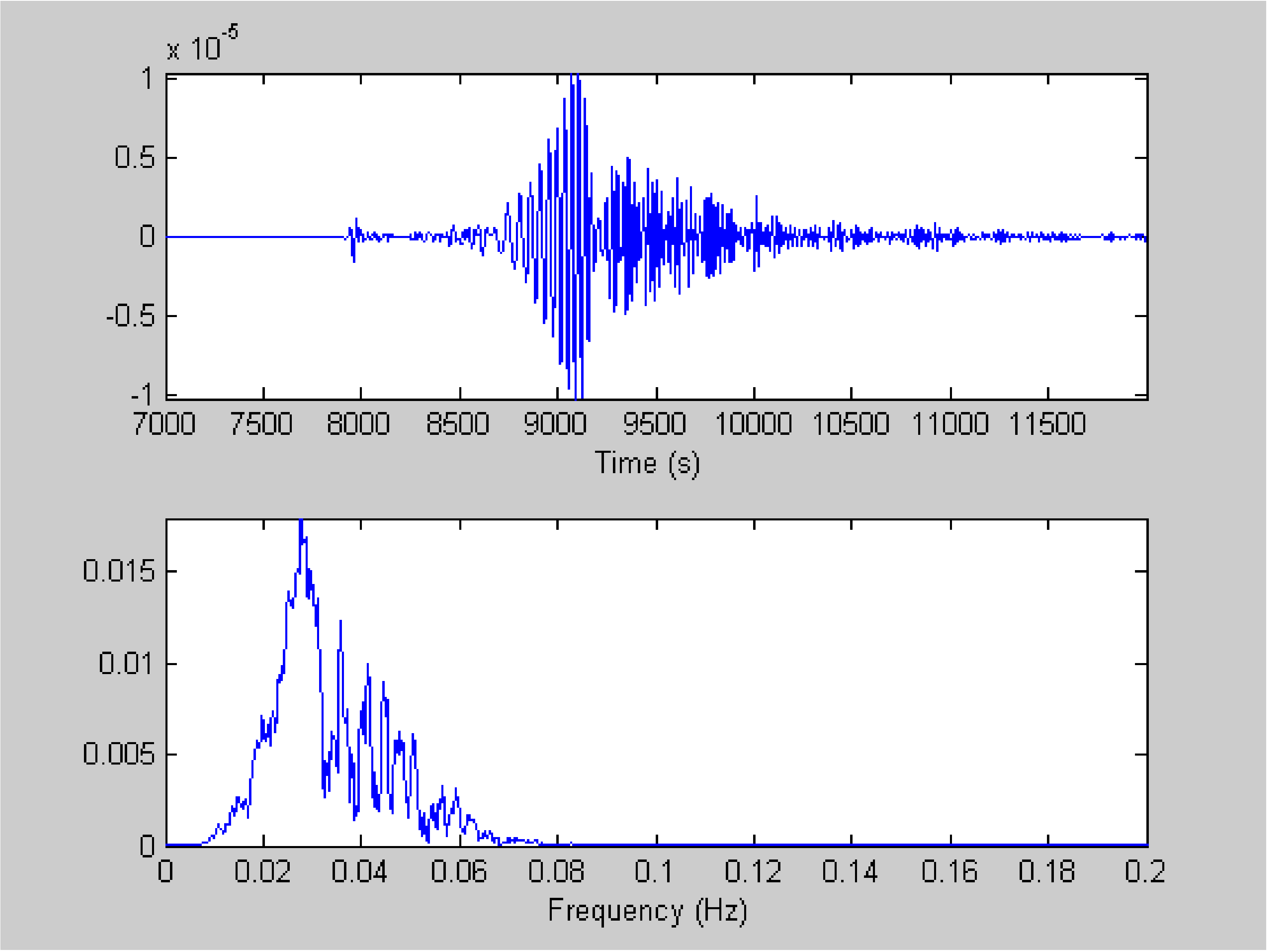
Beispiel: kausaler Filter (Tiefpass 20Hz)



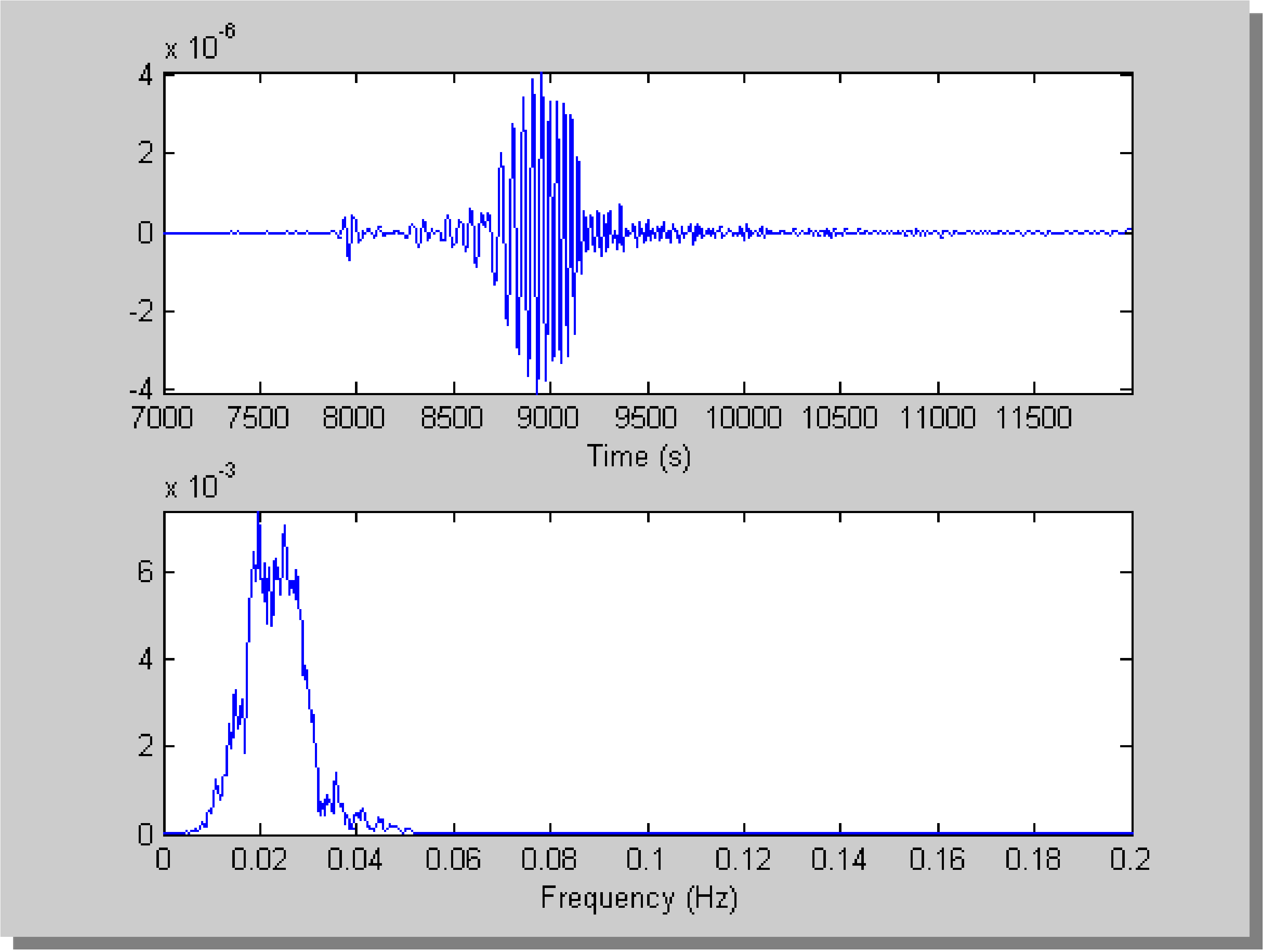
Digitales Filtern – Originales Seismogramm



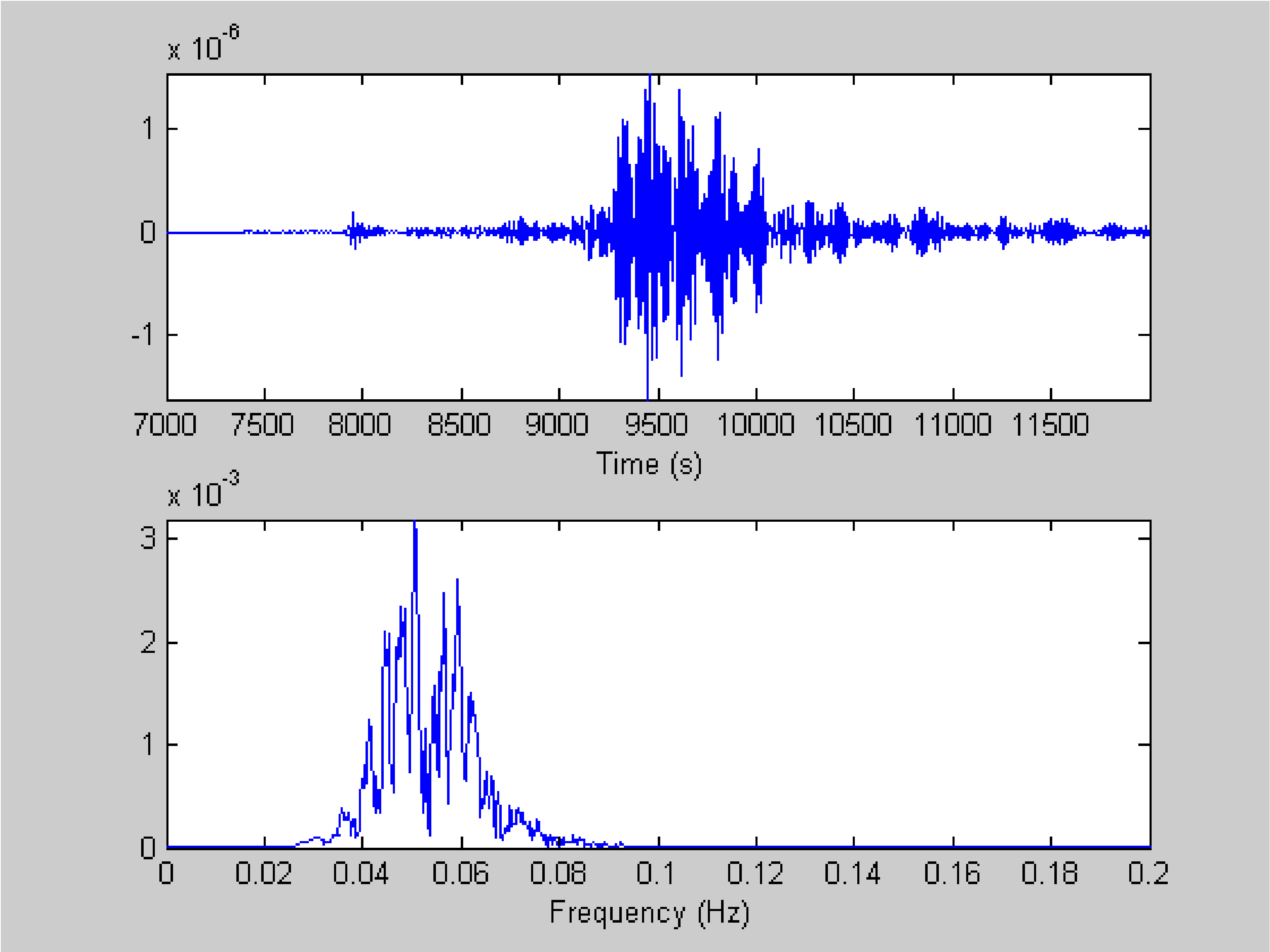
Tiefpass Filterung



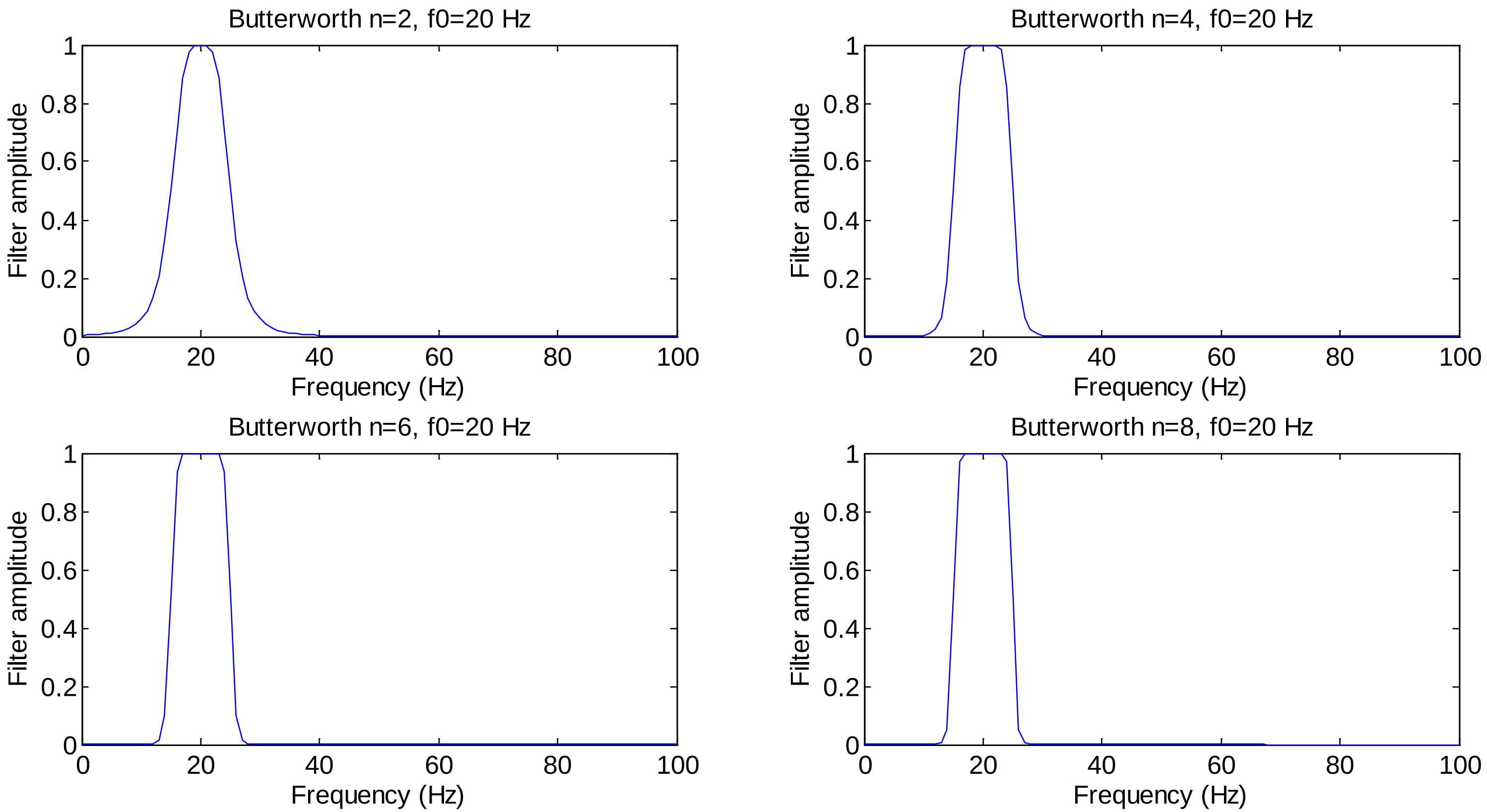
Tiefpass Filterung



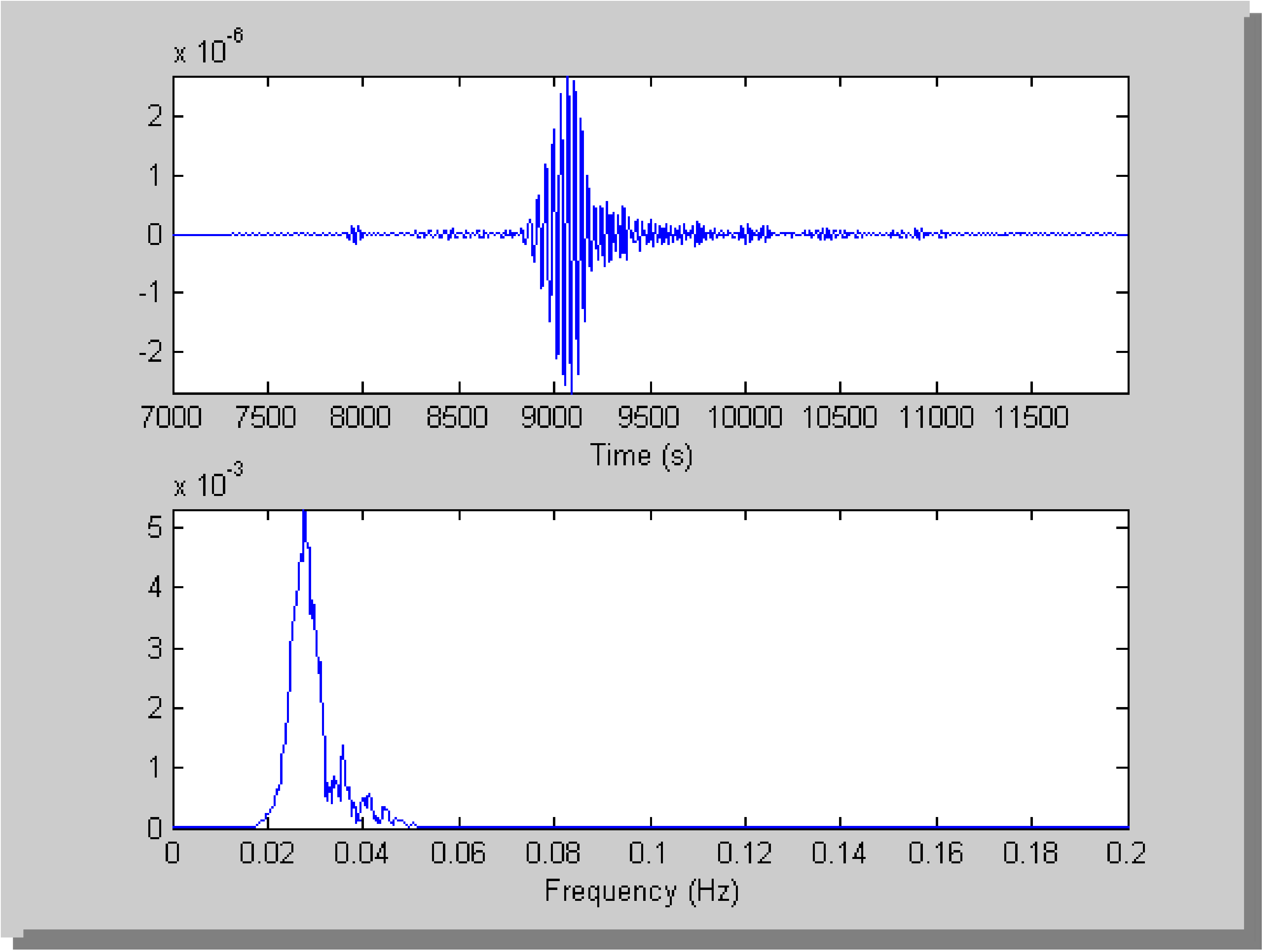
Hochpass Filter



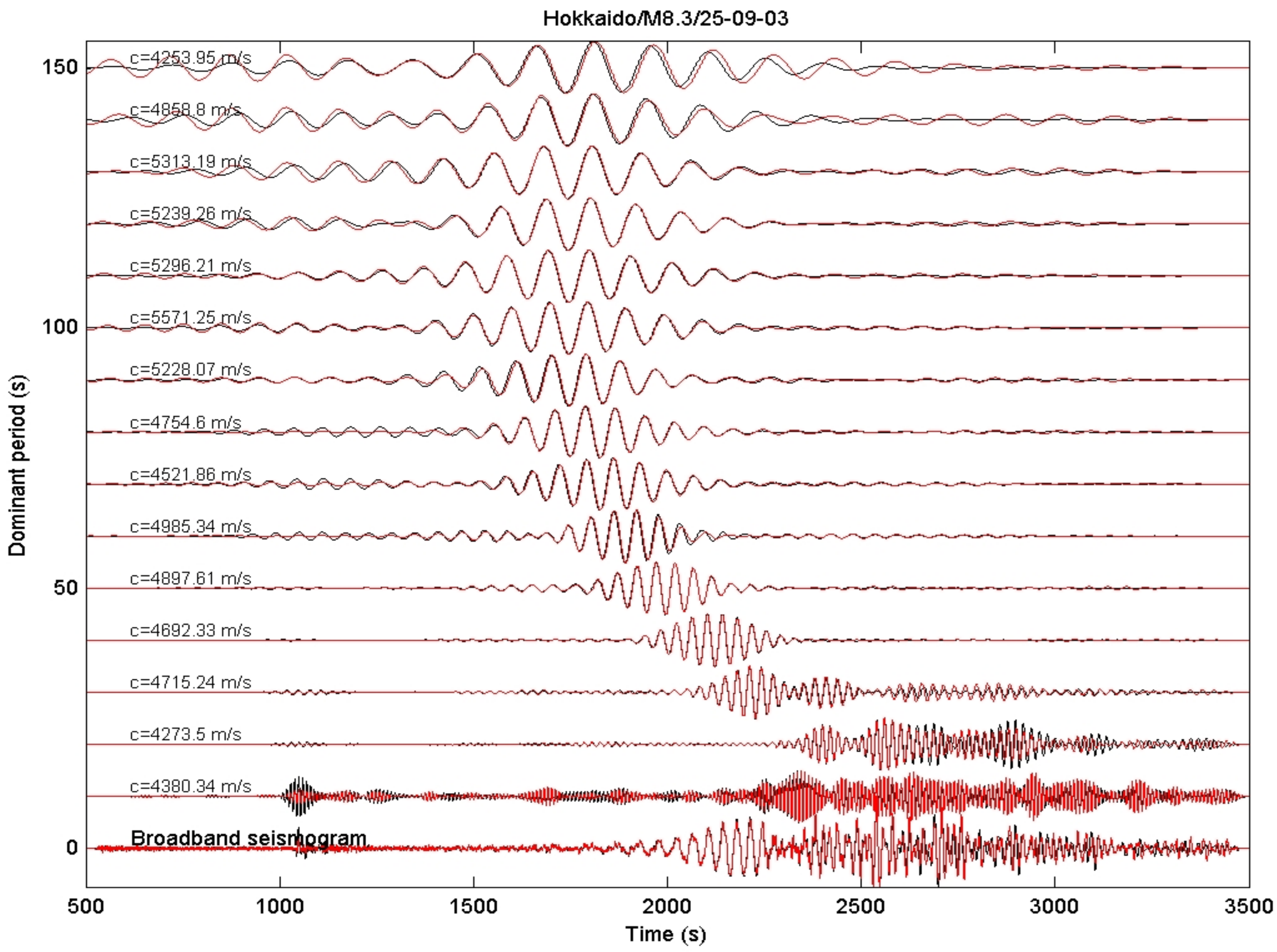
Bandpass (Butterworth)



Bandpass Filter



Bandpass Filter



Zusammenfasung

Spektralanalyse ist die Basis der Dateninterpretation in der Seismologie

Die Konzepte sind:

(De-) Konvolution –> um die Response eines Systems auf einen bestimmte Eingabe zu erhalten (oder umgekehrt)

Korrelation -> um Signale nach ihrer Ähnlichkeit zu vergleichen und ihre Verschiebungen festzustellen. (Phasen Delays)

Fourier Transformation – Spektren - Filterung -> um bestimmte Frequenzen herauszuschneiden, und die interessanten Signale hervorzuheben, Rauschen zu unterdrücken.