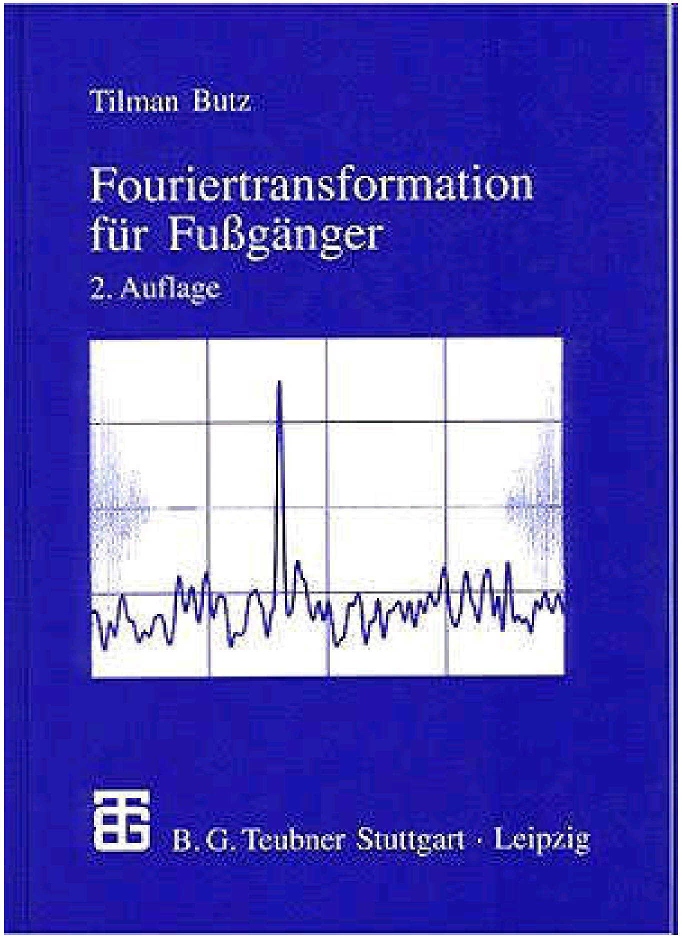
Spektralanalyse

Spektralanalyse ist derart wichtig in allen Naturwissenschaften, dass man deren Bedeutung nicht **überbewerten** kann!

Mit der Spektralanalyse können wir Antworten auf folgende Fragen bekommen:

- Welche (räumliche oder zeitliche) Frequenzen sind in meinem Signal enthalten?
- Gibt es ein periodisches Signal in meinen Beobachtungen?
- Muss ich die Eigenschaften des Messinstruments (z.B. Seismometer) einbeziehen um das physikalische Signal zu erhalten?
- Muss ich das Signal filtern, um das physikalische Signal zu sehen ?
- und, und, und …

Empfohlene Lektüre



Chapter 2, Keary et al., Introduction to Geophysical Exploration

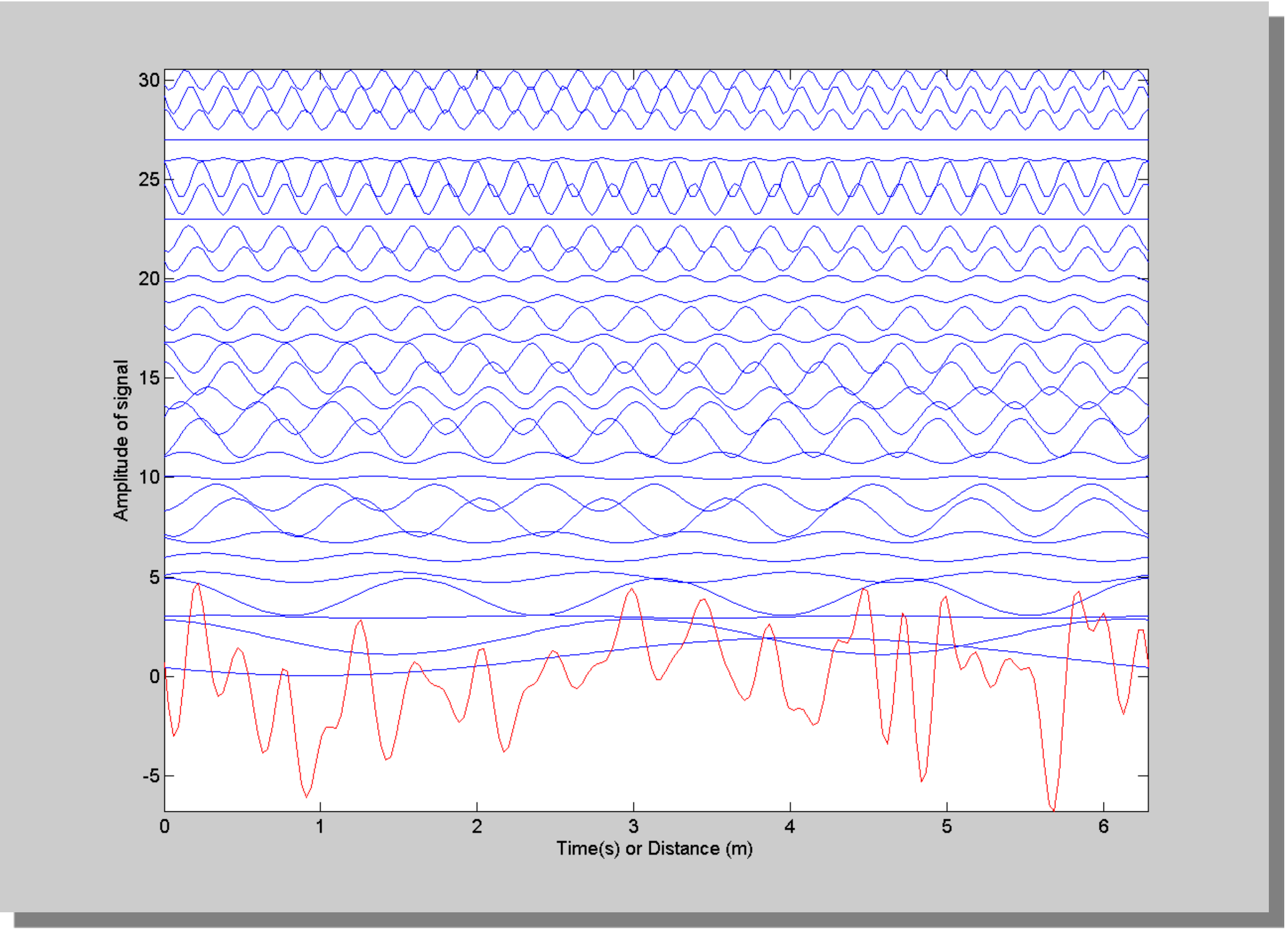
Harmonische Analyse – Spektralzerlegung

Der Kern der Spektralanalyse ist eines der wichtigsten Theoreme der mathematischen Physik:

Jedes endliche periodische Signal kann mit Hilfe von überlagerten harmonischen (Sinus-, Cosinus-) Signalen dargestellt (approximiert) werden.

Die Repräsentation des diskreten physikalischen Systems durch Zeit und Raum oder durch Frequenz und Wellenzahl ist (unterbestimmten Voraussetzungen) äquivalent! Es gibt keinen Informationsverlust, wenn man von dem einen Raum in den anderen transformiert, oder zurück.

Spektralanalyse (anschaulich)



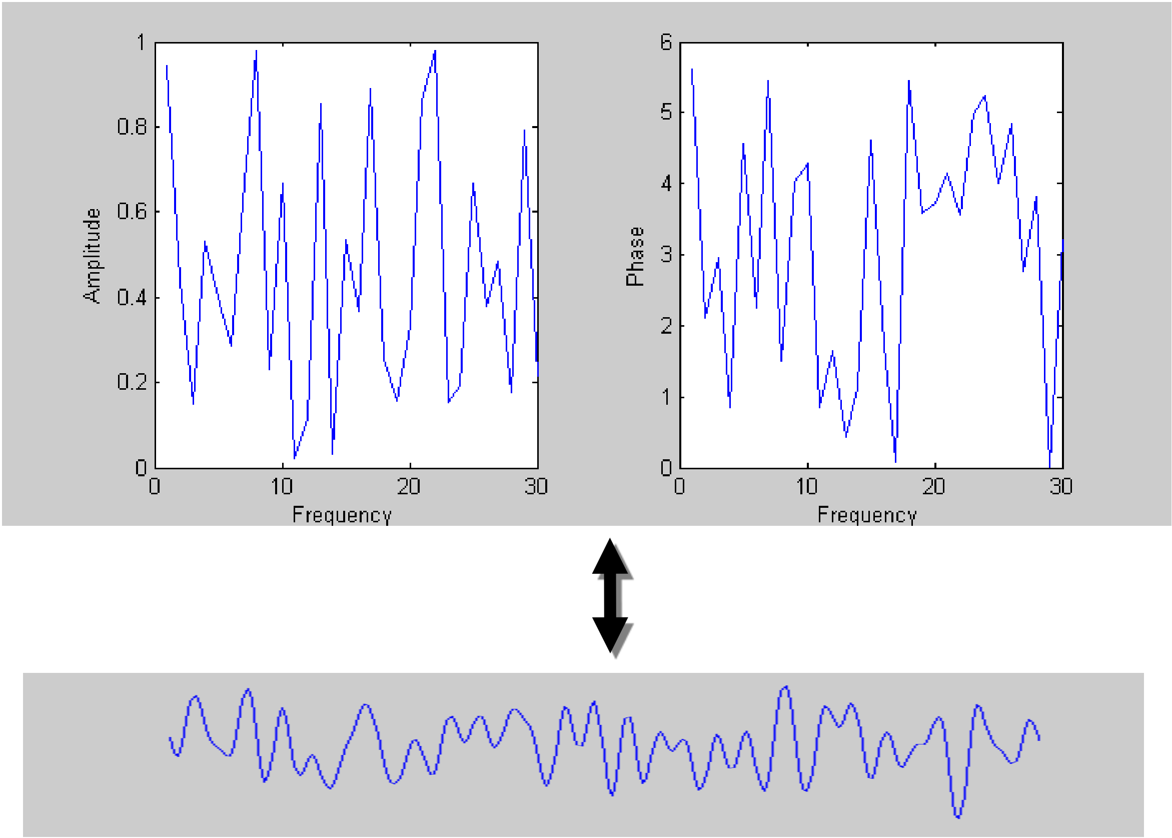
die rote Spur ist die Summe aller blauen Spuren!

Das Spektrum

Fourier Raum
Spektralbereich

Amplitudenspektrum

Phasenspektrum

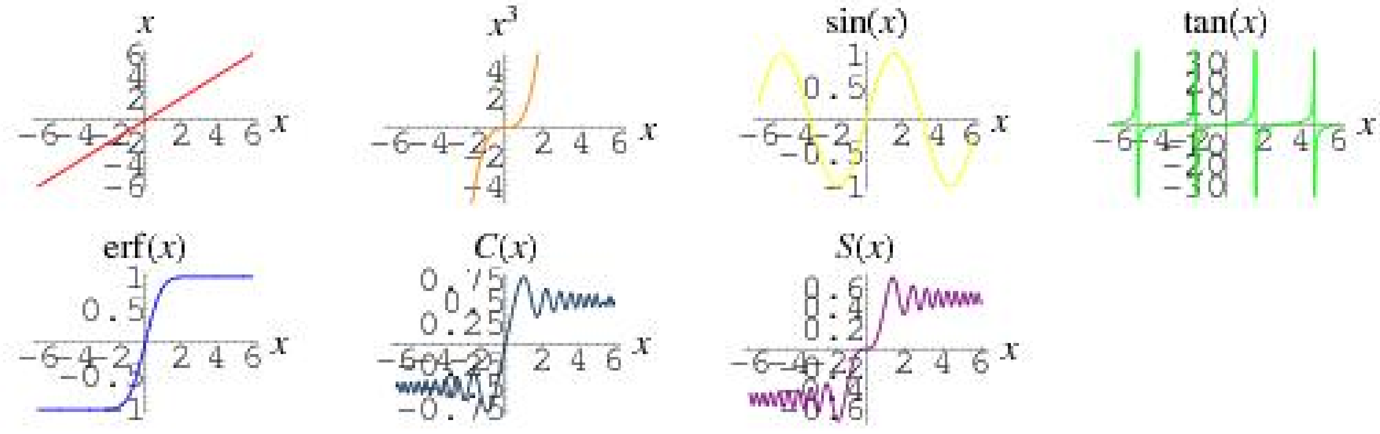


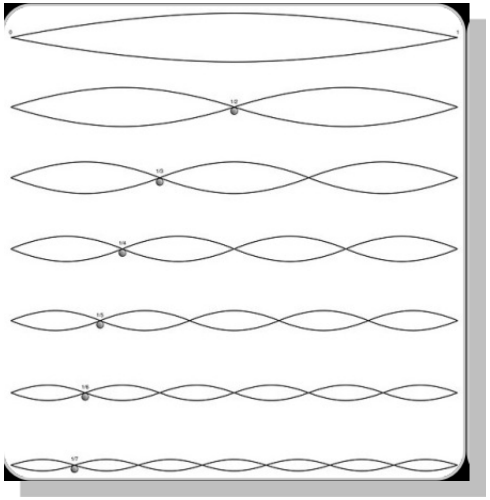
Raum oder Zeit

Fourier Zerlegung

Husten Sie an eine Harfe oder einen offenen Flügen, zerlegt das Instrument ihren Sound in einzelne Anteile unterschiedlicher Frequenz (hier: Saiten)

Mathematische Beschreibung
ungerade Funktionen





Mathematische Beschreibung (ungerade Funktionen)

Eine Sinusfunktion (a Amplitude, λ Wellenlänge) wird repräsentiert durch:

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Ignoriert man die Phasenverschiebung, so kann man ein beliebiges Signal erhalten durch Überlagerung von (a_0 an beiden Enden)

$$f(x) = a_0 + \sum_n a_n \sin\left(\frac{\pi n}{\mathrm{L}}x\right) \qquad n = 1, \infty$$

Hierbei ist L die Länge des Bereichs (räumlich oder zeitlich). Die Sequenz der Wellenlängen/Perioden ist: 2L, L, 2/3L, L/2 …

Die Fourier Komponenten
(ungerade Funktionen)

Die Amplituden/Koeffizienten (a_n) der Fourier Basisfunktionen (sin oder cos) erhält man durch Integration des Signals

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

Durchschnittswert des Signals

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Spektrale Komponente

Fouierreihen

beliebige Funktionen Intervall [-L, L]

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\mathrm{L}}x\right) + b_n sin\left(\frac{\pi n}{\mathrm{L}}x\right) \qquad n = 1, \infty$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-\mathrm{L}}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\mathrm{L}}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-\mathrm{L}}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Die a_n und b_n sind die Anteile der verschiedenen Frequenzen!

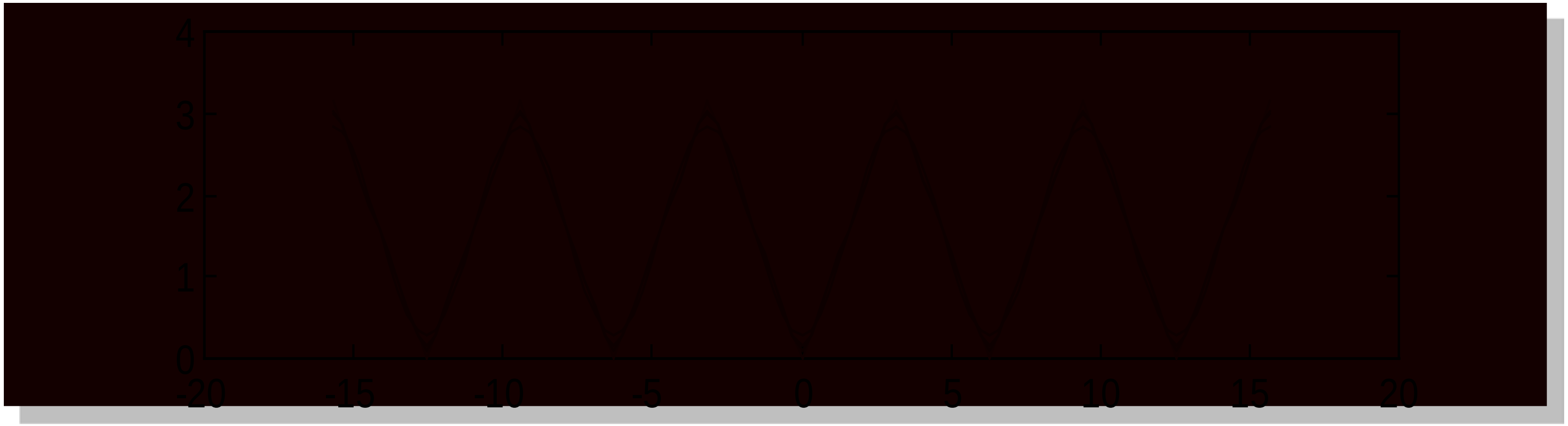
Beispiel: Fourier Näherung der Funktion |x|

$$f(x) = |x|, \qquad -\pi \le x \le \pi$$

Mit der Fourierreihe

$$g(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \ldots\right\}$$

.. für n<4 …



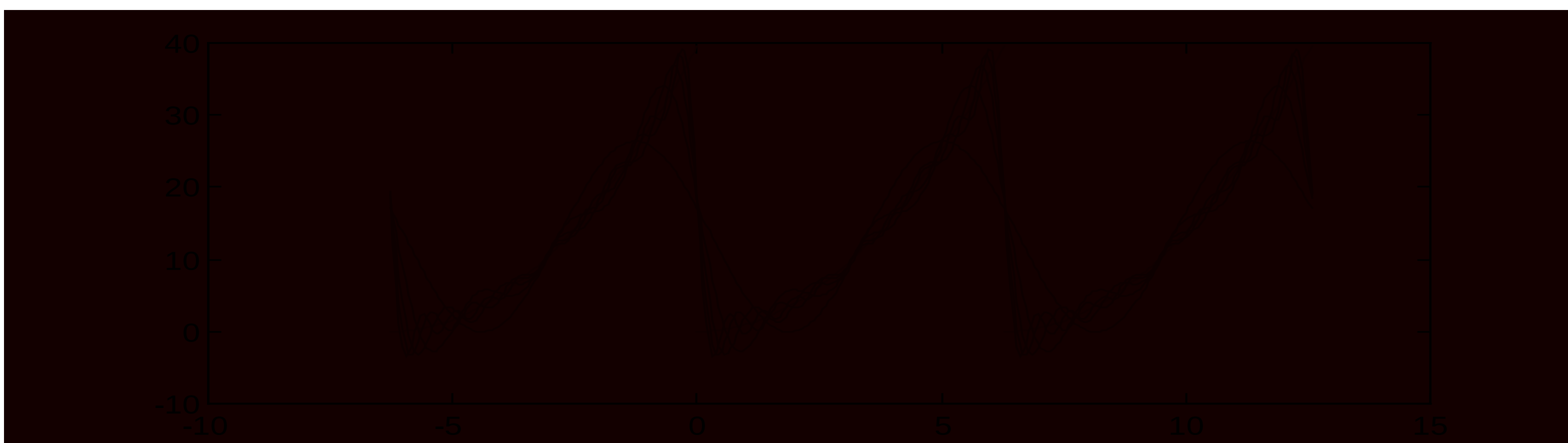
Beispiel: Fourier Näherung der Funktion x^2

$$f(x) = x^2, \qquad 0 < x < 2\pi$$

Mit der Fourierreihe

$$g_N(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{4}{k^2}\cos(kx) - \frac{4\pi}{k}\sin(kx) \right\}$$

... Für N<11 ….



Fourier: Raum und Zeit

	Raum
x	räumliche Variable
L	räumliche Wellenlänge
k=2□/□	Räumliche Wellenzahl
F(k)	Wellenzahl Spektrum

	Zeit
t	zeitliche Variable
T	Periode
f	Frequenz
□=2□f	Kreisfrequenz

Fourierintegrale

Mit der komplexen Darstellung der Sinusfunktionen e^{ikx} (oder e^{iwt}) wird die Fouriertransformation einer Funktion f(x) wie folgt geschrieben (VORSICHT: es gibt verschiedene Definitionen!)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Die Fourier Transformation
diskret vs. kontinuierlich

kontinuierlich

Wenn wir mit dem Computer Daten verarbeiten, wird es stets auf der diskreten Fouriertransformation basieren.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

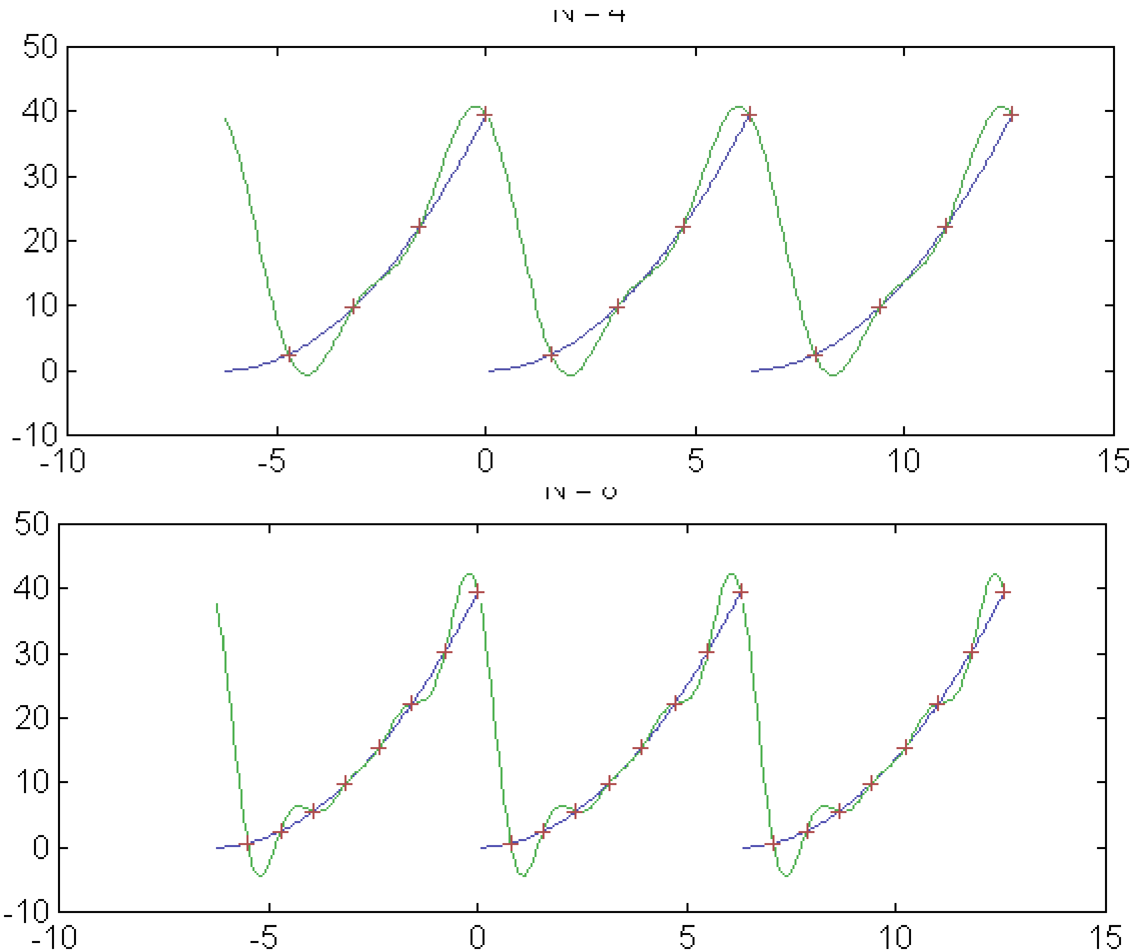
diskret

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi ikj/N}, k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$f_k = \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{2\pi ikj/N}, k = 0,1,\ldots,N-1$$

Diskrete Fourier Transformation

$f(x)=x^2$ => $f(x)$ - **blue** ; $g(x)$ - **red**; x_i - '+'



Die **grüne** Kurve interpoliert EXAKT an den Stützstellen (**+**)

The Fast Fourier Transform (FFT)

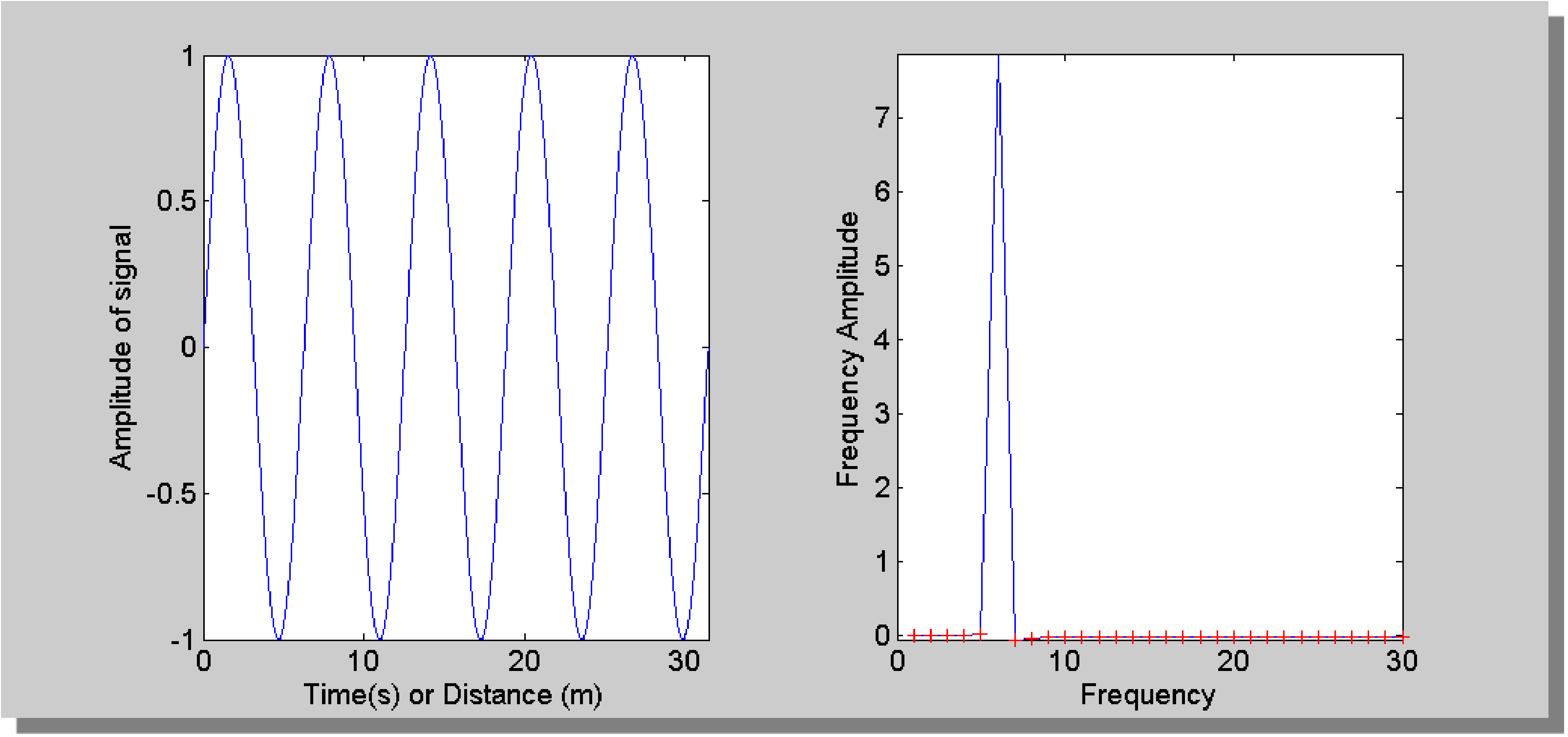
Die meisten Verarbeitunsprogramme wie Octave, Matlab, **Python**, Mathematica, Fortran, etc. haben implementierte Funktionen für FFTs

Matlab FFT

```
>> help fft

 FFT Discrete Fourier transform.
  FFT(X) is the discrete Fourier transform (DFT) of vector X.  For
  matrices, the FFT operation is applied to each column. For N-D
  arrays, the FFT operation operates on the first non-singleton
  dimension.

  FFT(X,N) is the N-point FFT, padded with zeros if X has less
  than N points and truncated if it has more.

  FFT(X,[],DIM) or FFT(X,N,DIM) applies the FFT operation across the
  dimension DIM.

  For length N input vector x, the DFT is a length N vector X,
  with elements
                   N
     X(k) =       sum  x(n)*exp(-j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= k <= N.
                  n=1
  The inverse DFT (computed by IFFT) is given by
                   N
     x(n) = (1/N) sum  X(k)*exp( j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= n <= N.
                  k=1

  See also IFFT, FFT2, IFFT2, FFTSHIFT.
```

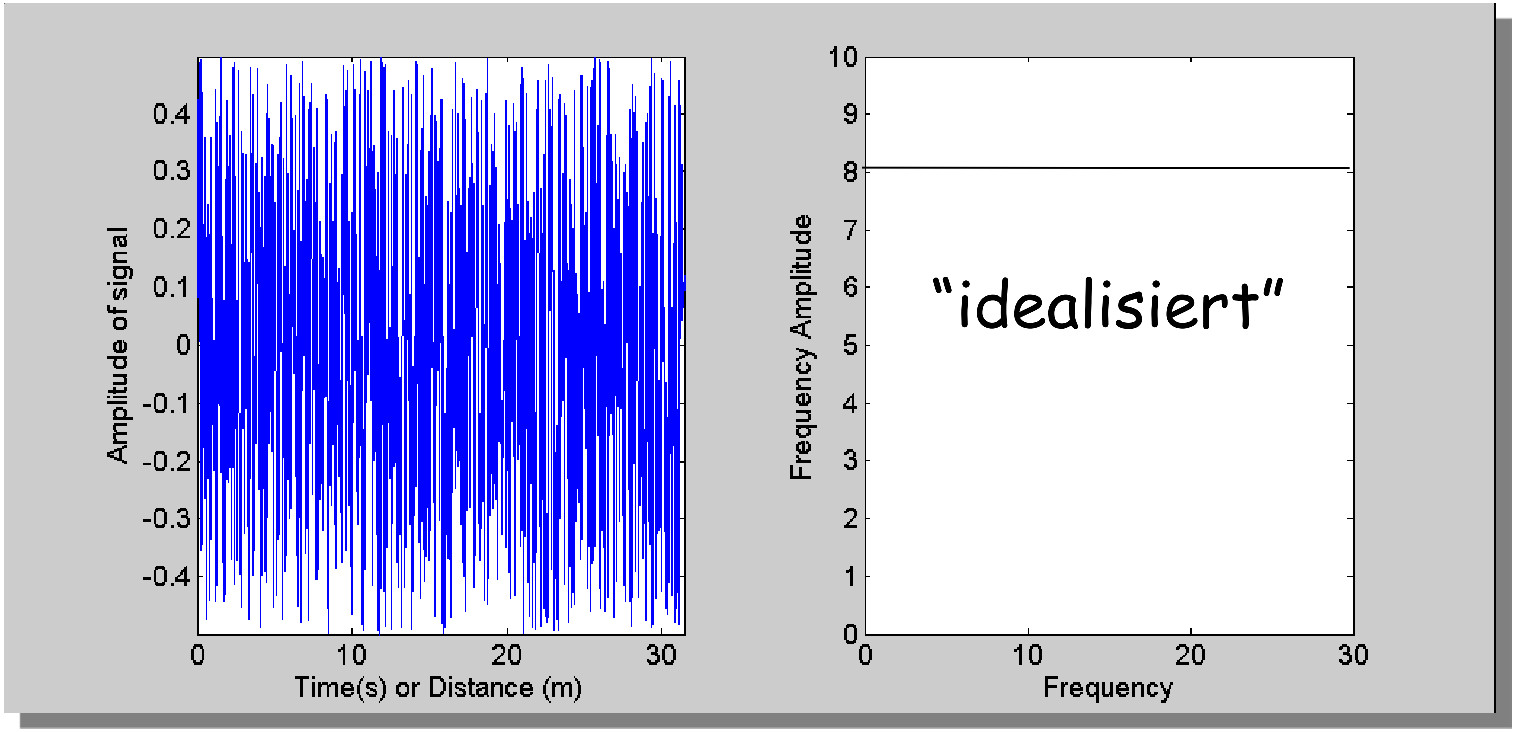
Die FFT ist eine clevere Ausnutzung von Symmetrien und führt zu einer enormen Beschleunigung der FT für große Vektoren

Fourier Spektren:
harmonische Signale



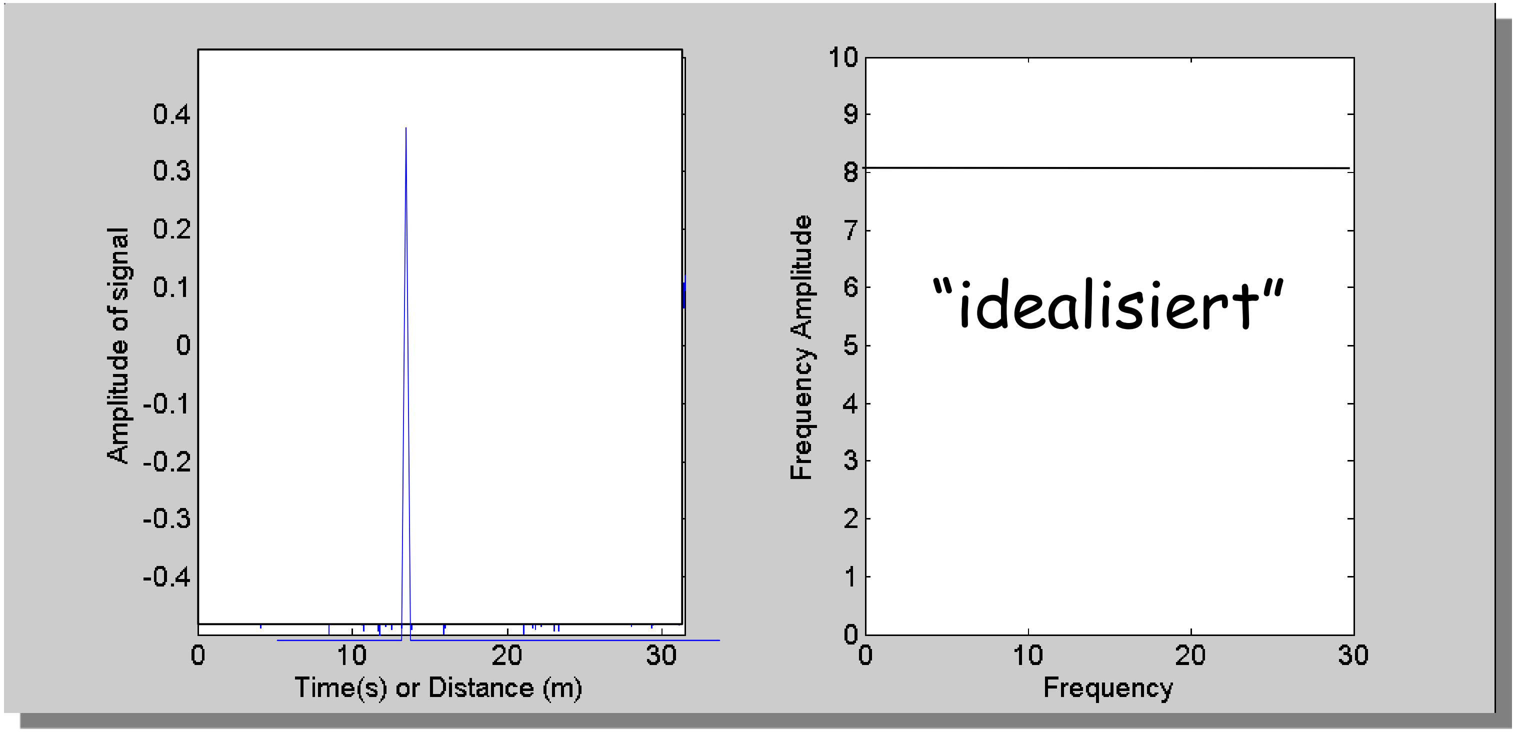
Das Spektrum eines (monochromatischen) harmonischen Signals (räumlich oder zeitlich) ist ein “Spike” („Delta-Funktion“) im Frequenzbereich.

Fourier Spektren:
zufällig verteilte (random) Signale



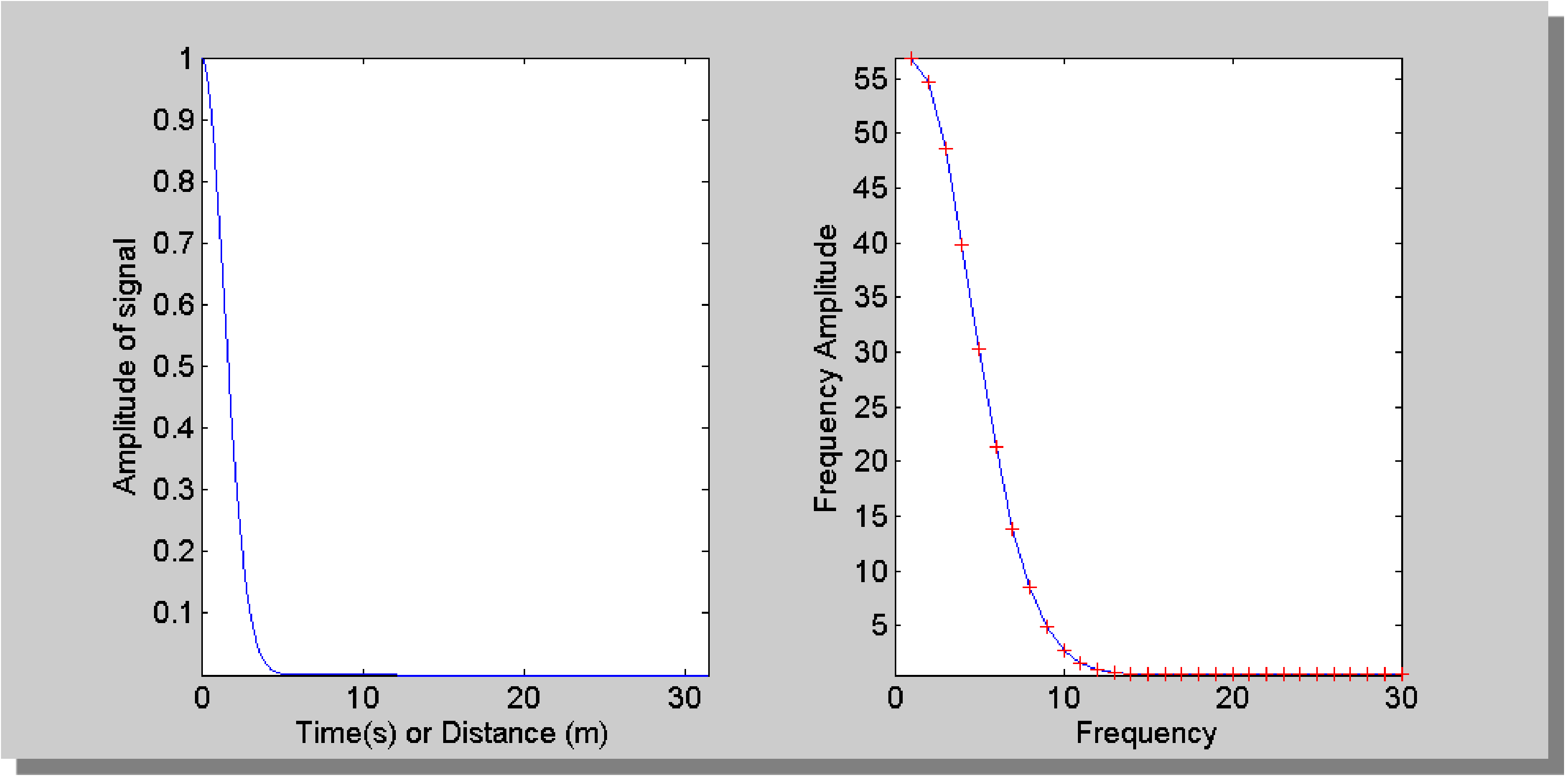
Zufällig verteilte Signale beinhalten alle Frequenzen. Ein Spektrum mit gleichmäßiger Verteilung aller Frequenzen nennt man weißes Spektrum

Fourier Spektren:
Impulsfunktion (*Deltafunktion*)



Ein unendlich scharfer Impuls enthält alle Frequenzen. Ein Spektrum mit gleichmäßiger Verteilung aller Frequenzen nennt man weißes Spektrum

Fourier Spektren:
Gauss-förmige Signale

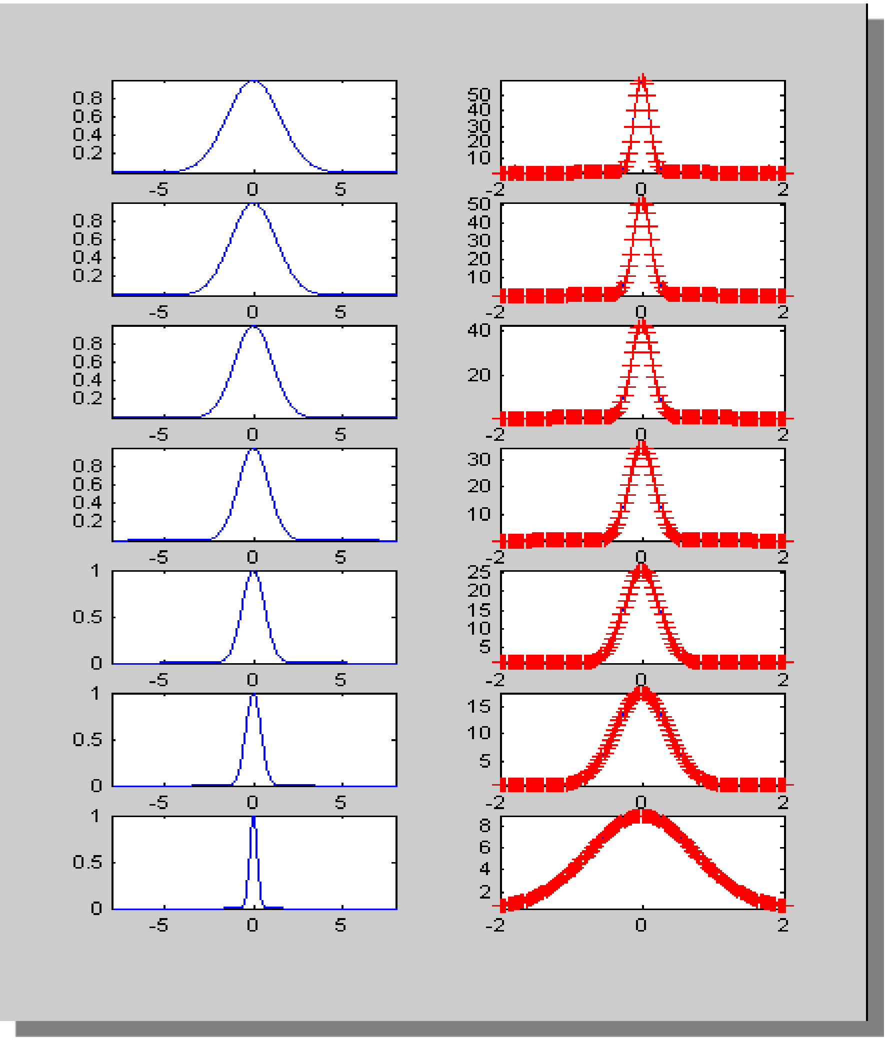


Das Spektrum einer Gauss-Funktion ist selbst eine Gauss-Funktion. Wie verändert sich das Spektrum, wenn man die Gauss-Funktion verengt?

Puls-Breite und Frequenz-Bandbreite
Unschärferelation

Zeit (Raum)　　Spektrum

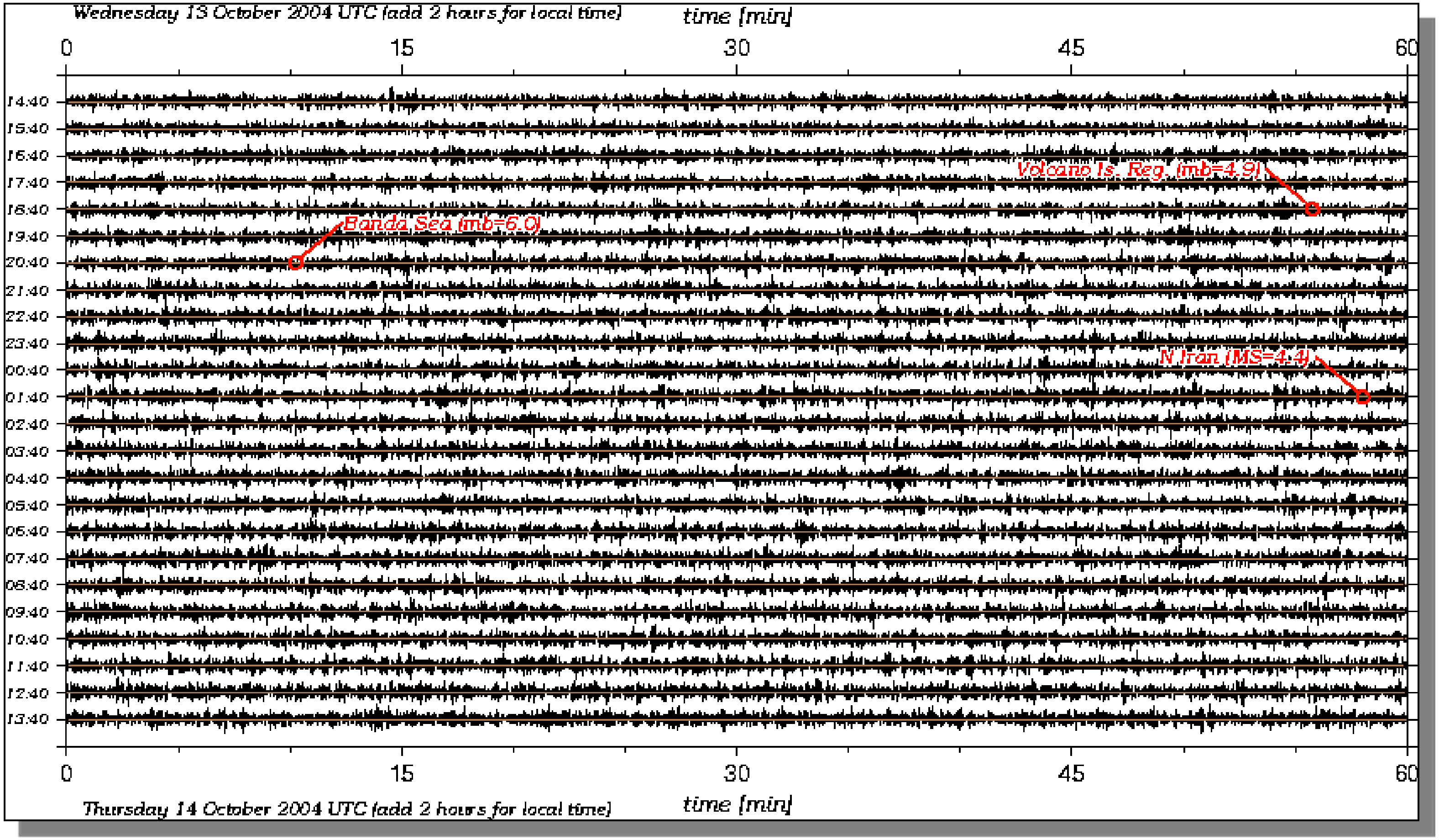
Verengen des physikalischen Signals



Verbreitern der Frequenzbandbreite

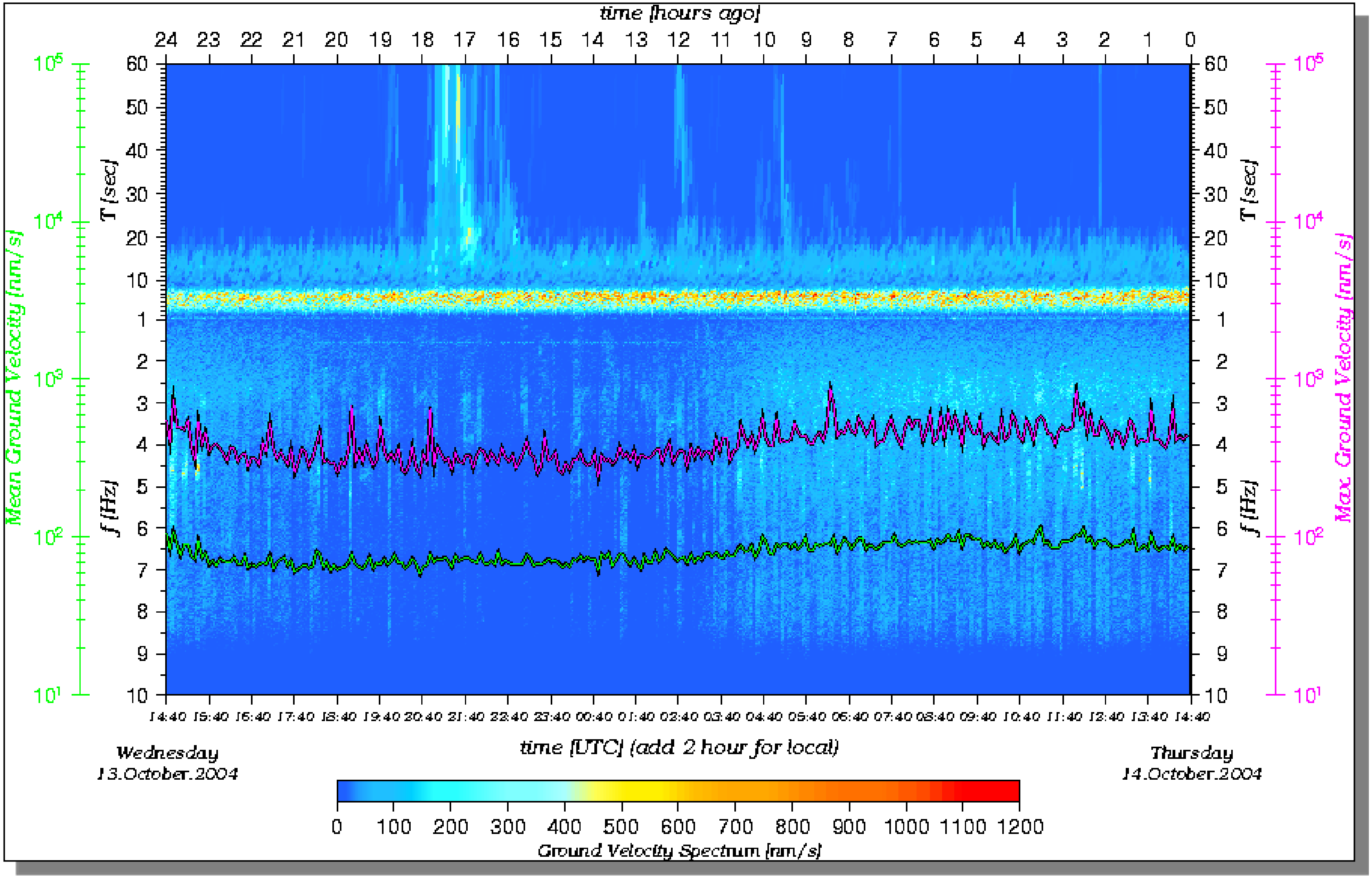
Wann höre ich welche Frequenz?

Zeit-Frequenz Analyse



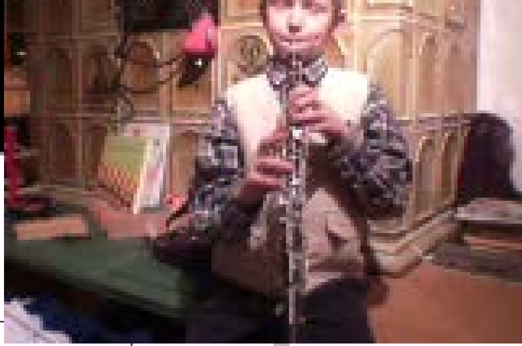
24 Std Bodenbewegung, sehen Sie ein Signal?

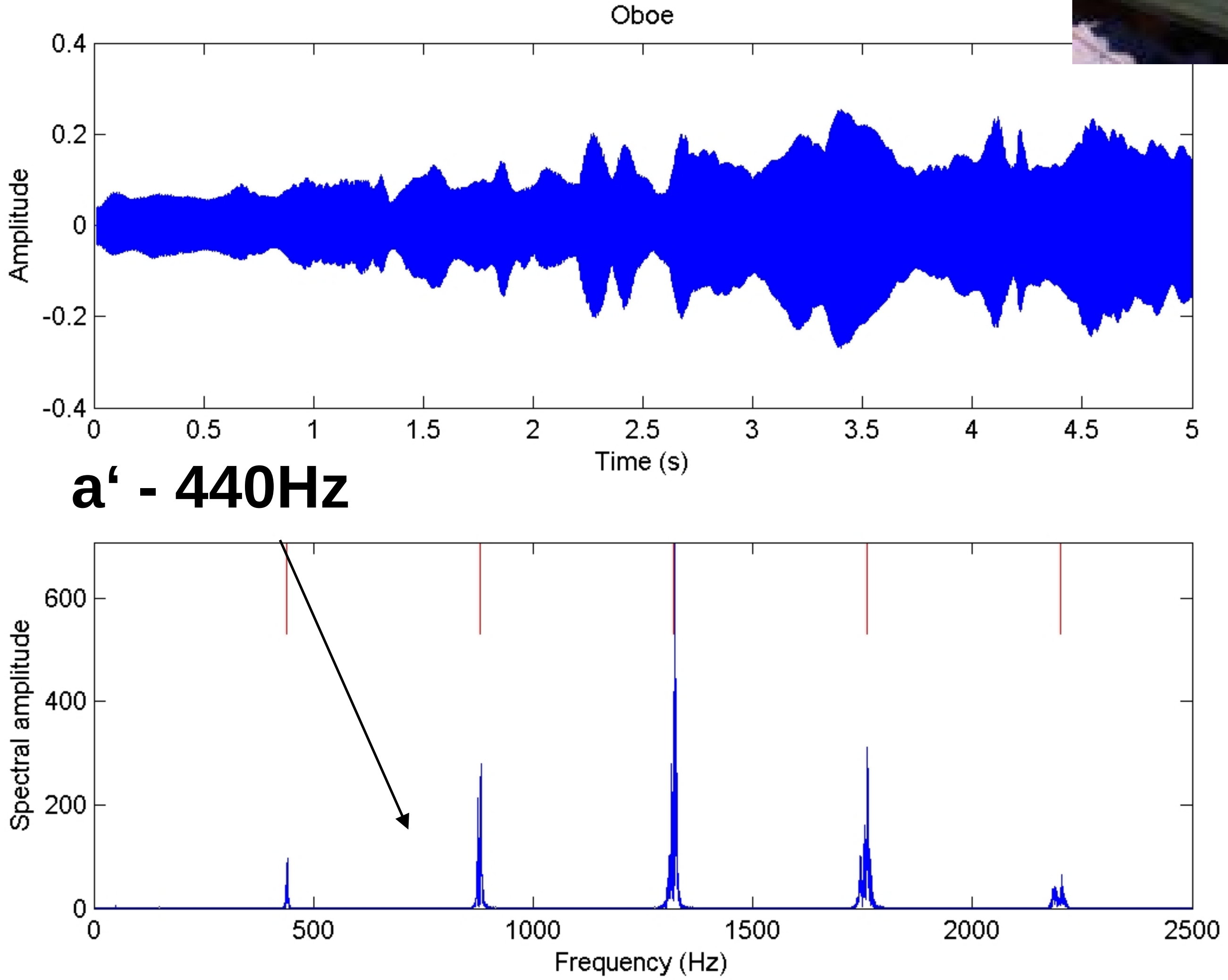
Seismo-Wetter



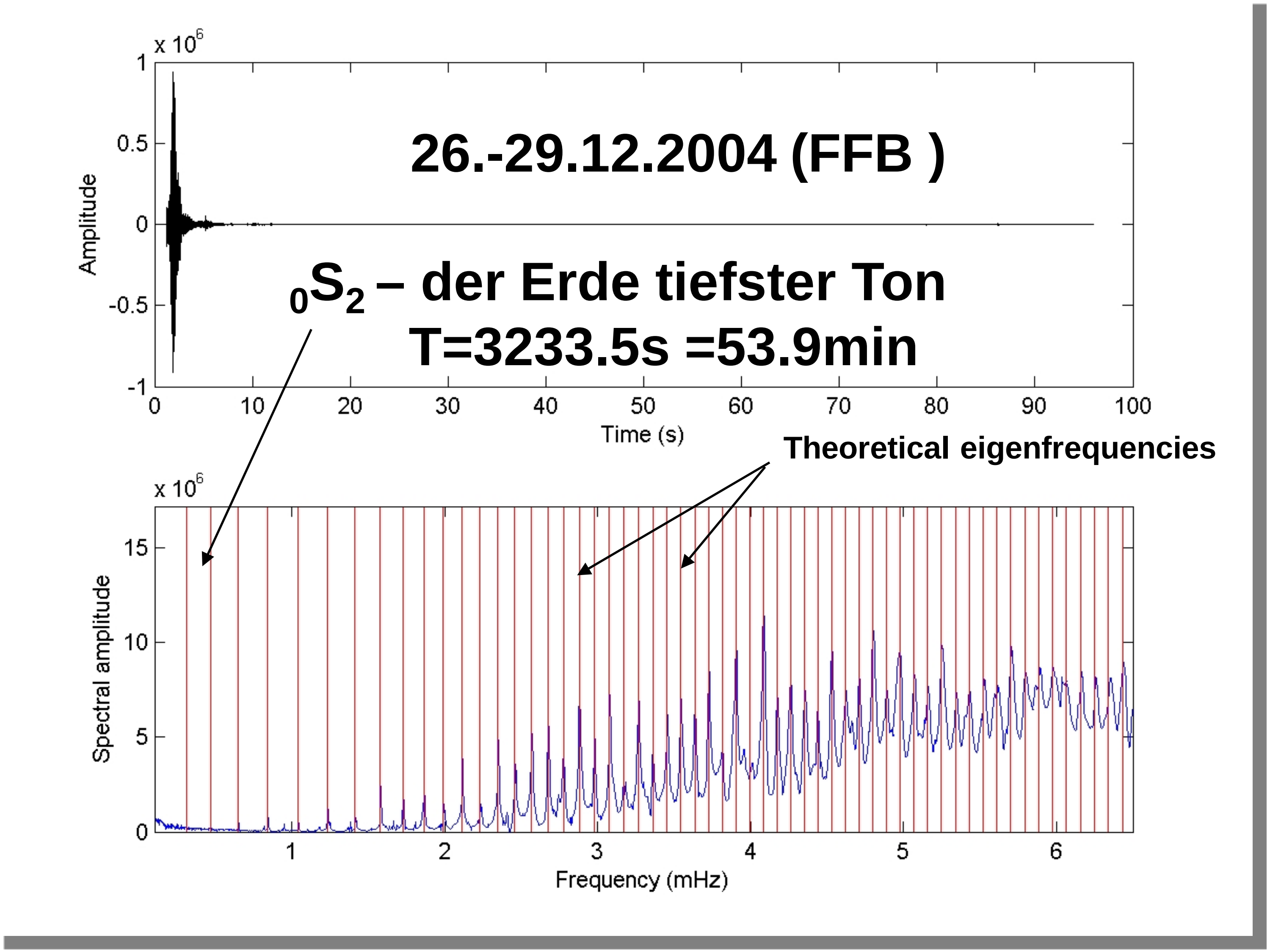
Laufendes Spektrum der selben Daten (Zeit-Frequenzanalyse)

Der Ton eines Instruments

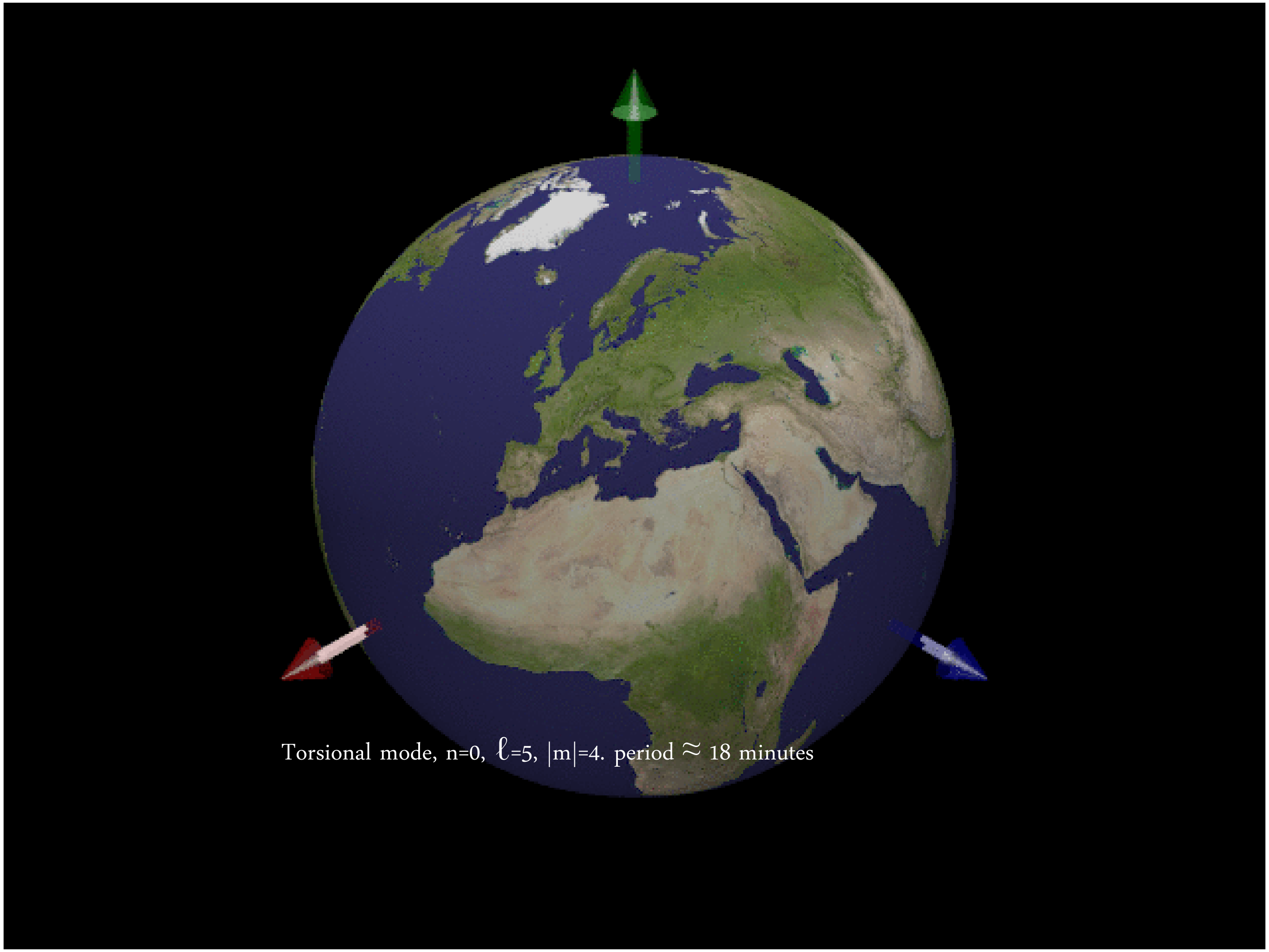




Das Instrument Erde

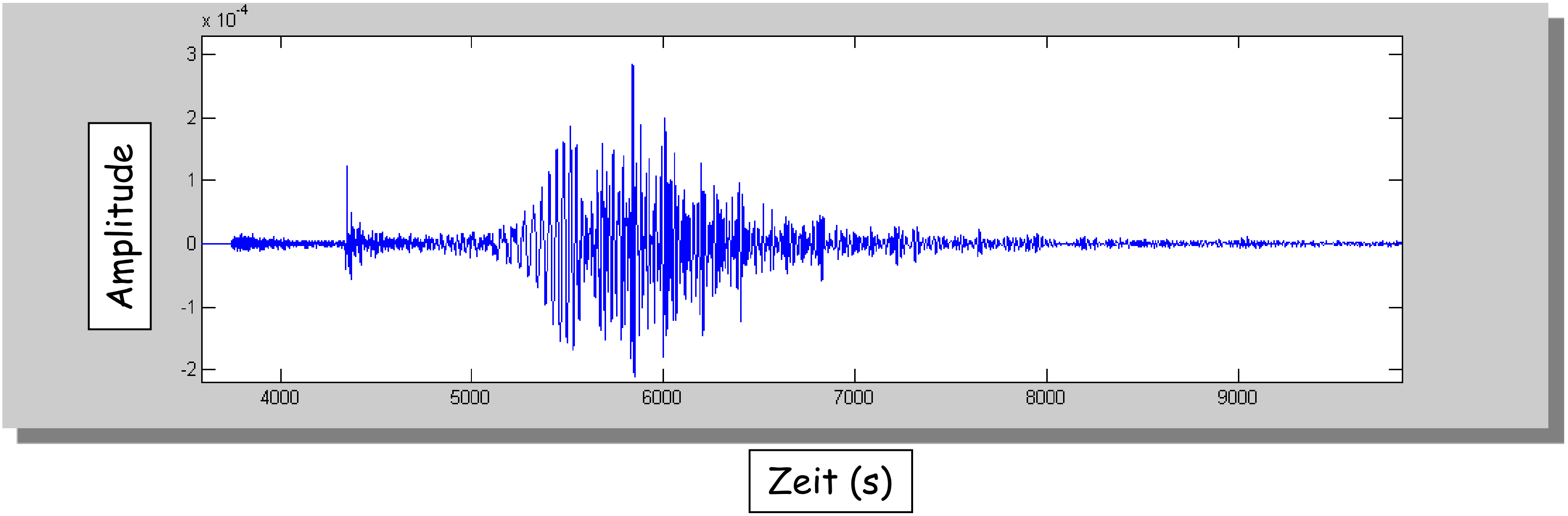


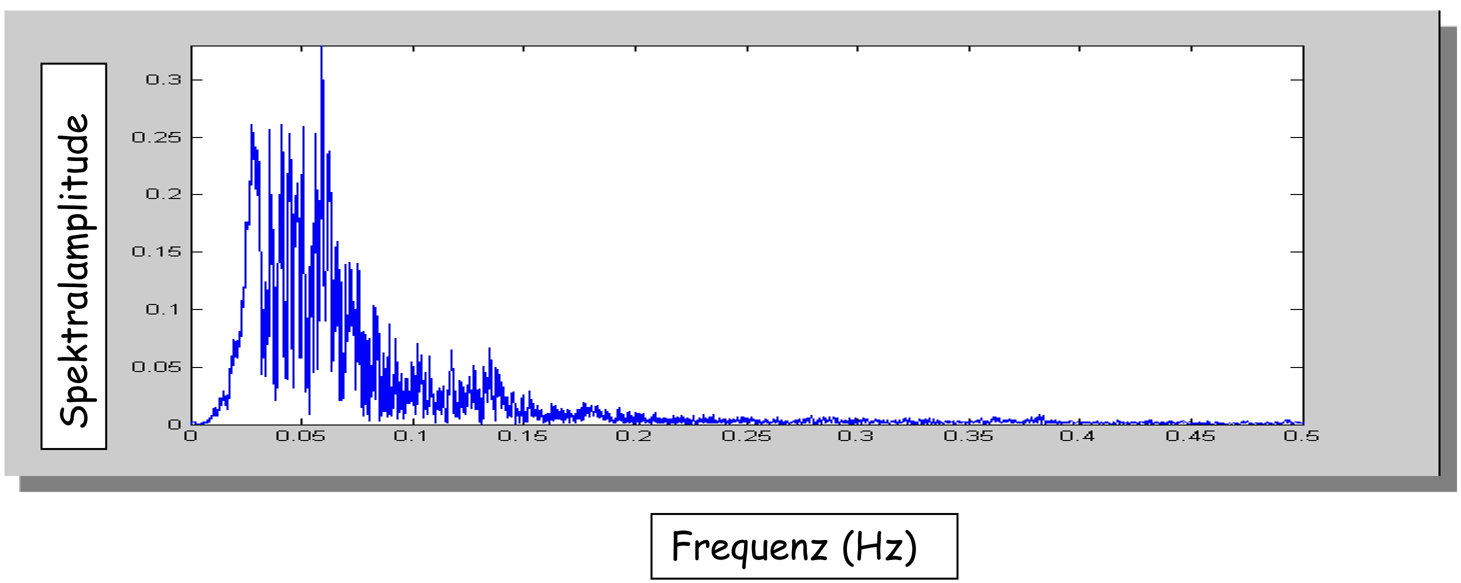
Eigenschwingungen der Erde



Source: http://icb.u-bourgogne.fr/nano/MANAPI/saviot/terre/index.en.html

Ein Seismogramm und sein Spektrum





Zusammenfassung

- Zeitreihen werden in der Regel mit Hilfe der Spektralanalyse bearbeitet.
- Eine Zeitreihe kann in den Spektralbereich transformiert werden, d.h. das Signal wird in seine Spektralanteile zerlegt.
- Zeitreihen werden in ein Amplitudenspektrum und ein Phasenspektrum zerlegt
- Im Spektralbereich kann an erkennen, welche Frequenzen am Signal maßgeblich beteiligt sind.
- Um zu erkennen, wann welche Frequenzen auftreten, wendet man die Zeit-Frequenzanalyse an.
- Die Transformation vom Zeit in den Frequenzbereich ist die Fouriertransformation