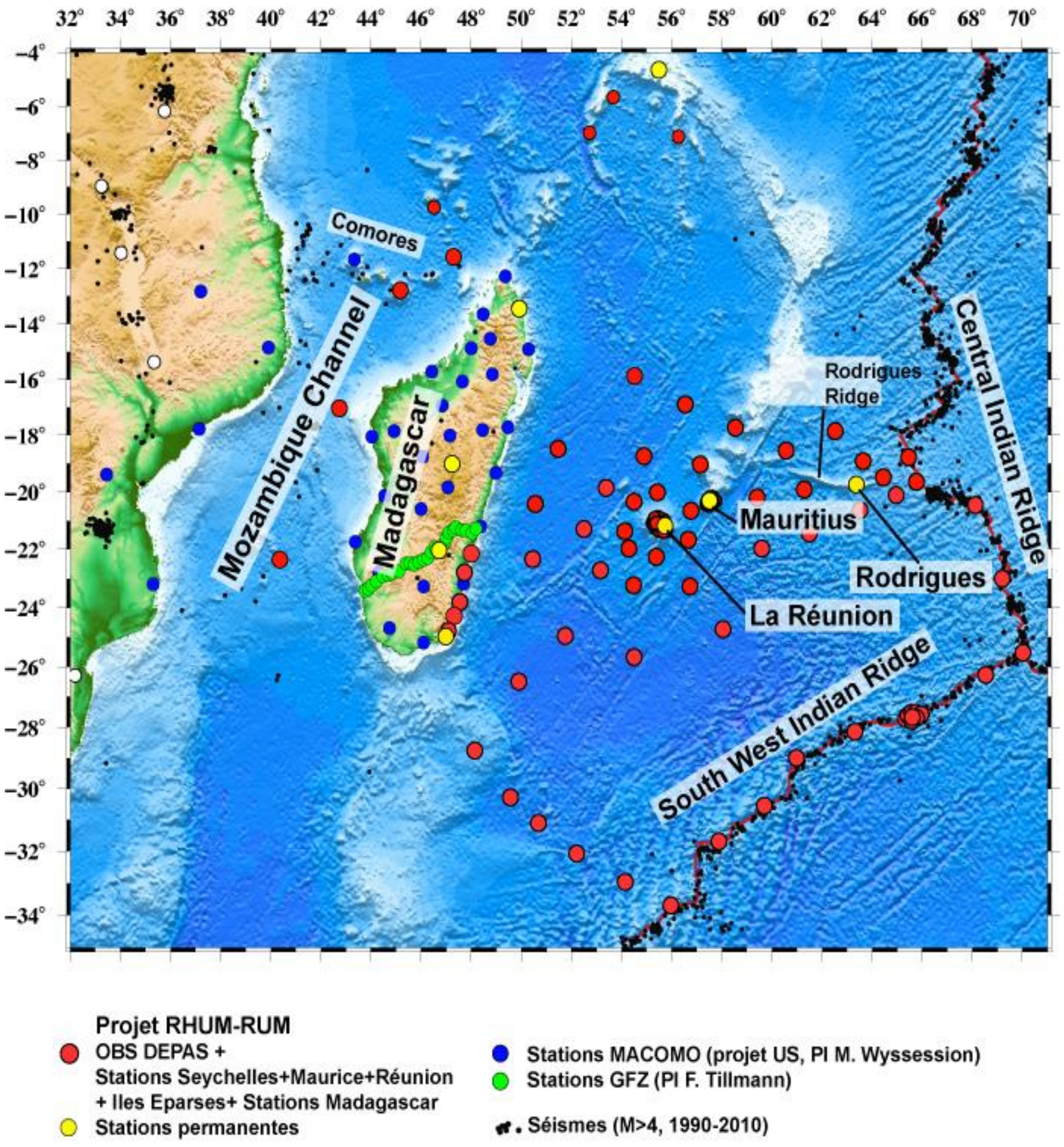
Faltung, Korrelation, Filtern

- Wie beschreibe ich lineare Systeme (z.B. Seismometer) -> Faltung, Konvolution, Dekonvolution?
- Wie quantifiziere ich die Ähnlichkeit von Zeitreihen (-> Korrelation)
- Wie quantifiziere ich zeitliche Versätze (z.B. Laufzeitunterschiede) -> Korrelation
- Wie unterdrücke ich bestimmte Frequenzbereiche (-> Filtern)

Shearer: Chapter 11, Instruments and Appendix E (Time series and Fourier transforms)
Kearey et al: Chapter 2.4, 2.5
Mussett and Khan: Chapter 3.2, 3.3

Motivation

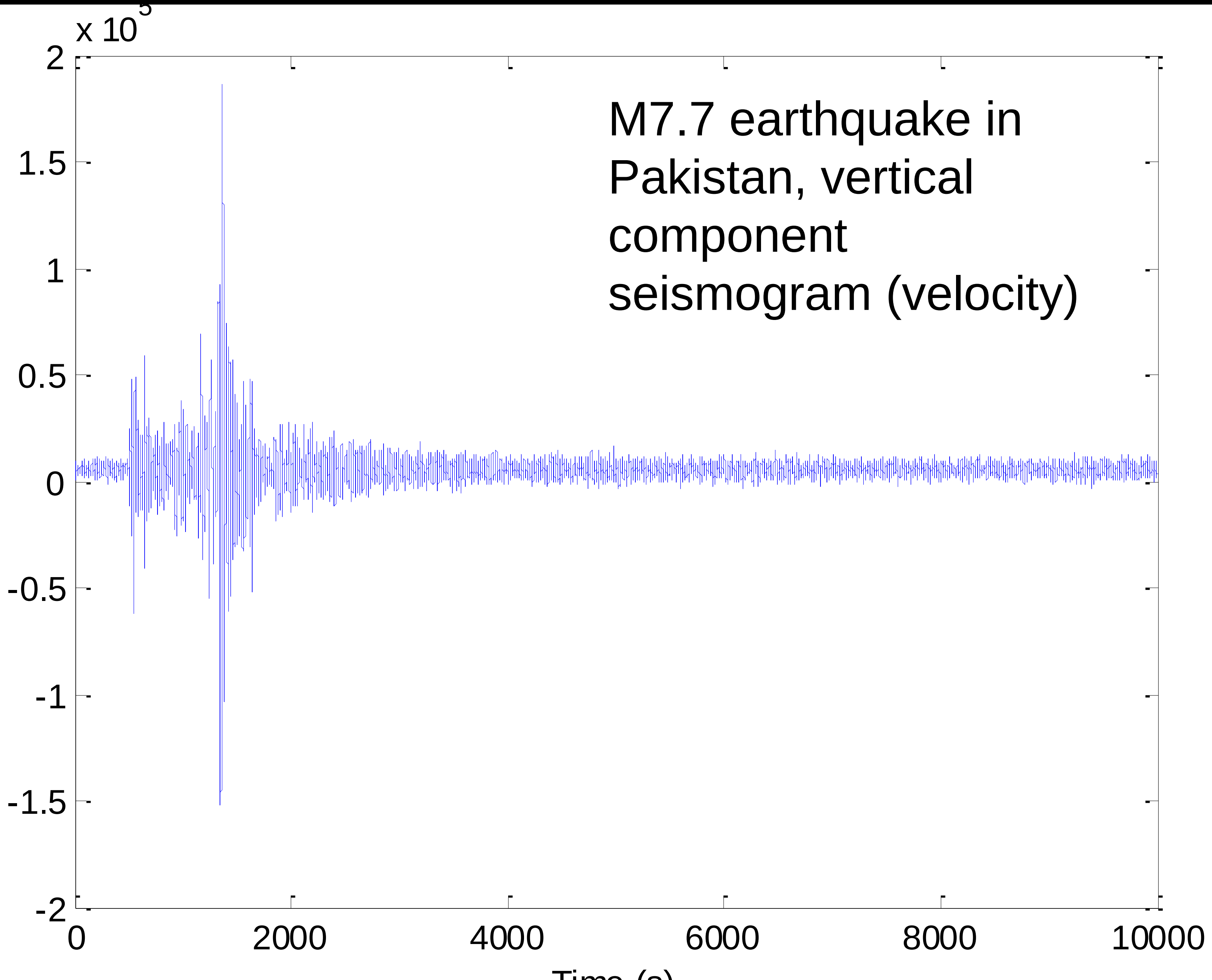
Aktuelles Beispiel: OBS Experiment RHUM-RUM



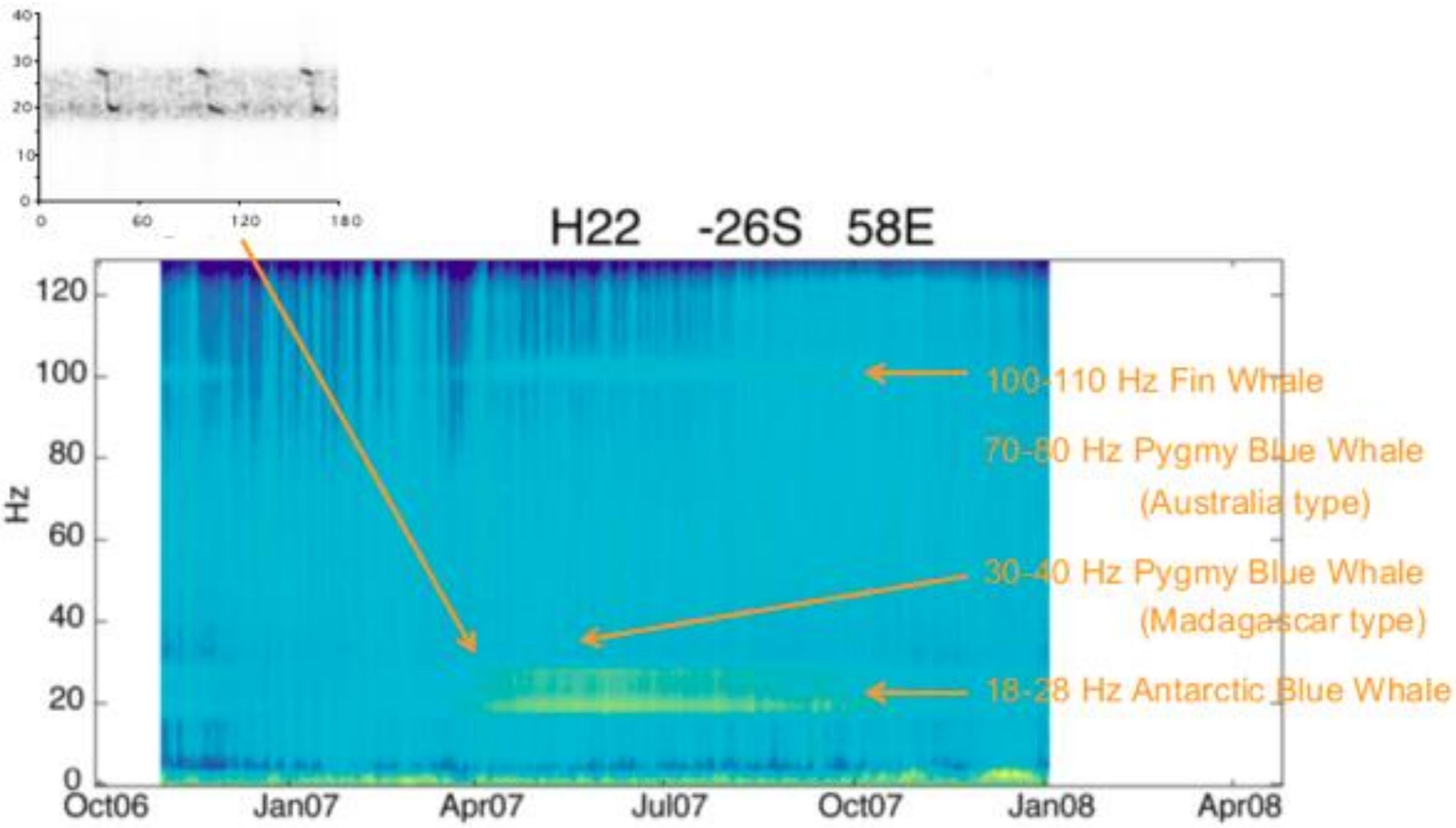
Aktuelles Beispiel: OBS Experiment RHUM-RUM

Aktuelles Beispiel: OBS Experiment RHUM-RUM

Aktuelles Beispiel: OBS Experiment RHUM-RUM

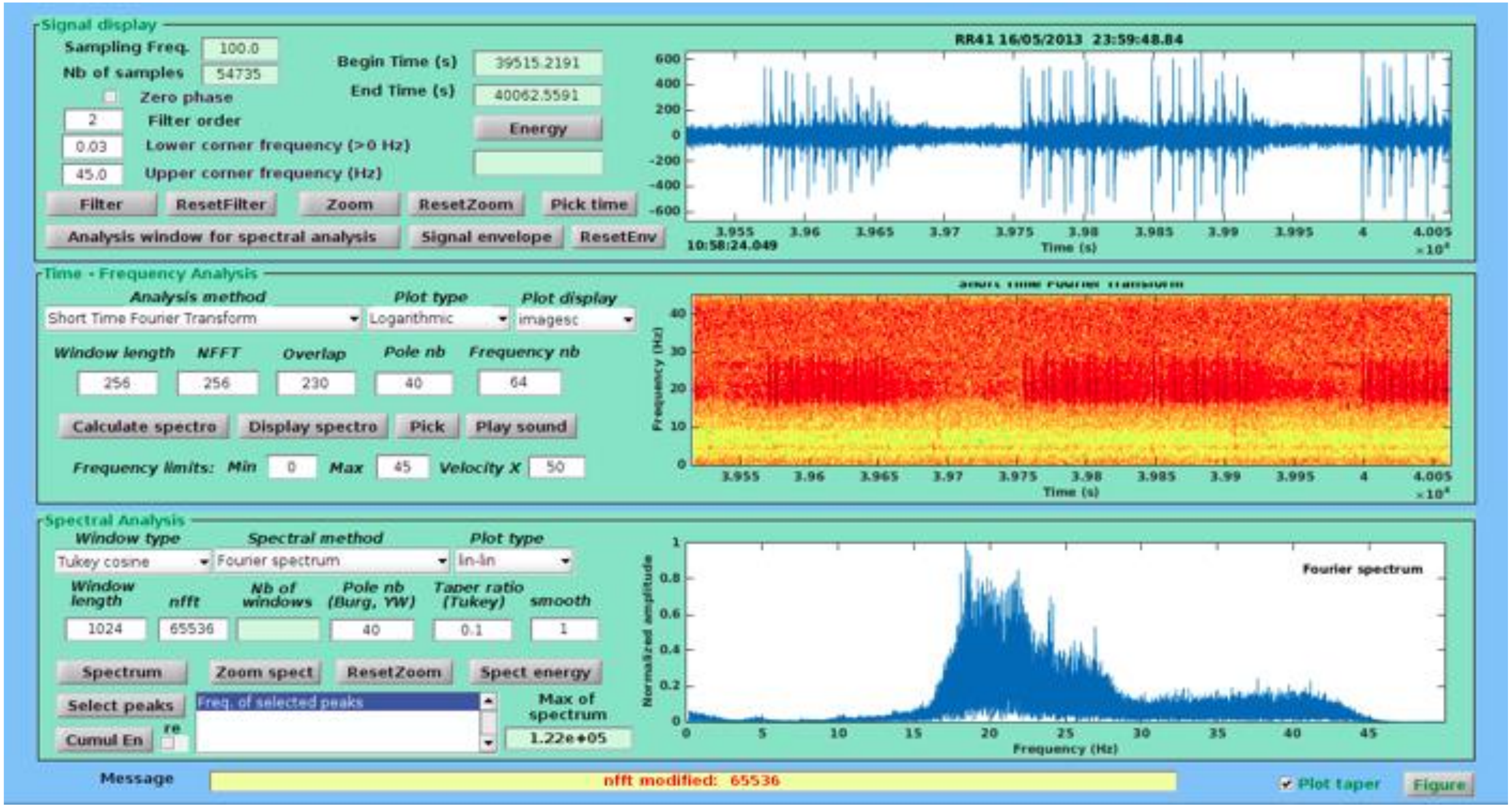


Whales



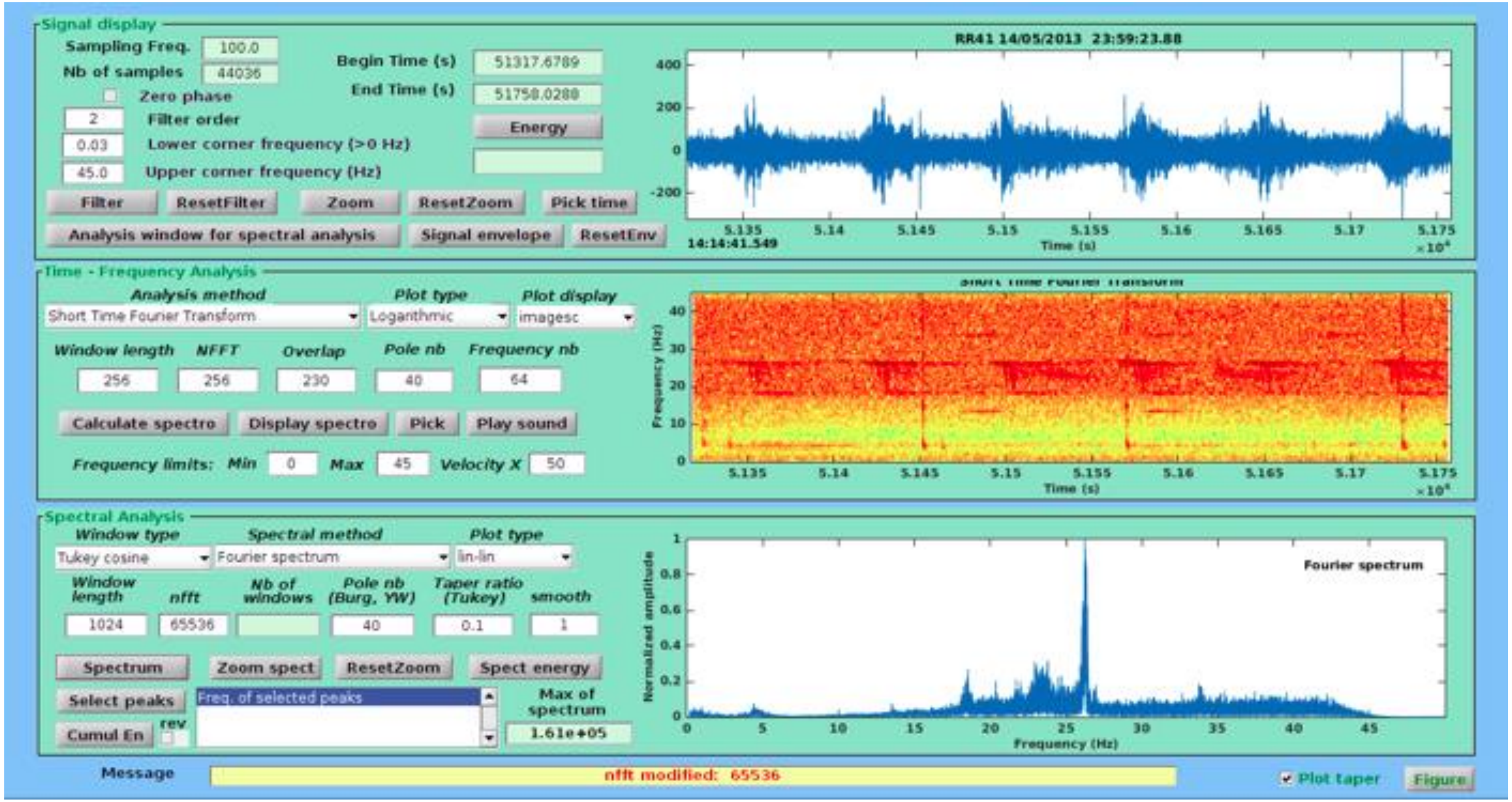
H22 -26S 58E
Hz
100-110 Hz Fin Whale
70-80 Hz Pygmy Blue Whale
(Australia type)
30-40 Hz Pygmy Blue Whale
(Madagascar type)
18-28 Hz Antarctic Blue Whale
Oct06
Jan07
Apr07
Jul07
Oct07
Jan08
Apr08

Fin Whale



Signal display
Sampling Freq. 100.0
Nb of samples 54735
Begin Time (s) 39515.2191
End Time (s) 40062.5591
Zero phase
Filter order
Lower corner frequency (>0 Hz)
Upper corner frequency (Hz)
Energy
Filter
ResetFilter
Zoom
ResetZoom
Pick time
Analysis window for spectral analysis
Signal envelope
ResetEnv
RR41 16/05/2013 23:59:48.84
Time (s)
Time - Frequency Analysis
Analysis method
Short Time Fourier Transform
Plot type
Logarithmic
Plot display
imagesc
Window length
NFFT
Overlap
Pole nb
Frequency nb
Calculate spectro
Display spectro
Pick
Play sound
Frequency limits: Min 0 Max 45 Velocity X 50
Frequency (Hz)
Spectral Analysis
Window type
Tukey cosine
Spectral method
Fourier spectrum
Plot type
lin-lin
Window length
nfft
Nb of windows
Pole nb (Burg, YW)
Taper ratio (Tukey)
smooth
Spectrum
Zoom spect
ResetZoom
Spect energy
Select peaks
Freq. of selected peaks
Max of spectrum
1.22e+05
Cumul En
Fourier spectrum
Normalized amplitude
Frequency (Hz)
Message
nfft modified: 65536
Plot taper
Figure

Blue Whale


Signal display
Sampling Freq. 100.0
Nb of samples 44036
Zero phase
2 Filter order
0.03 Lower corner frequency (>0 Hz)
45.0 Upper corner frequency (Hz)
Begin Time (s) 51317.6789
End Time (s) 51758.0288
Energy
Filter
ResetFilter
Zoom
ResetZoom
Pick time
Analysis window for spectral analysis
Signal envelope
ResetEnv
RR41 14/05/2013 23:59:23.88
14:14:41.549
Time (s)
Time - Frequency Analysis
Analysis method
Short Time Fourier Transform
Plot type
Logarithmic
Plot display
imagesc
Window length 256
NFFT 256
Overlap 230
Pole nb 40
Frequency nb 64
Calculate spectro
Display spectro
Pick
Play sound
Frequency limits: Min 0 Max 45 Velocity X 50
Frequency (Hz)
Time (s)
Spectral Analysis
Window type
Tukey cosine
Spectral method
Fourier spectrum
Plot type
lin-lin
Window length 1024
nfft 65536
Nb of windows
Pole nb (Burg, YW) 40
Taper ratio (Tukey) 0.1
smooth 1
Spectrum
Zoom spect
ResetZoom
Spect energy
Select peaks
Freq. of selected peaks
Max of spectrum 1.61e+05
Cumul En
rev
Fourier spectrum
Normalized amplitude
Frequency (Hz)
Message
nfft modified: 65536
Plot taper
Figure

ToDo List

- Instrument correction (de-convolution)
- Noise suppression (filtering)
- Travel time analysis (correlation – time delay)
- Timing corrections (correlation, phase differences)
- Signal detection (cross-correlation)

These processing steps require understanding of spectral analysis using *convolution/deconvolution, correlation, filtering*

Linear Systems

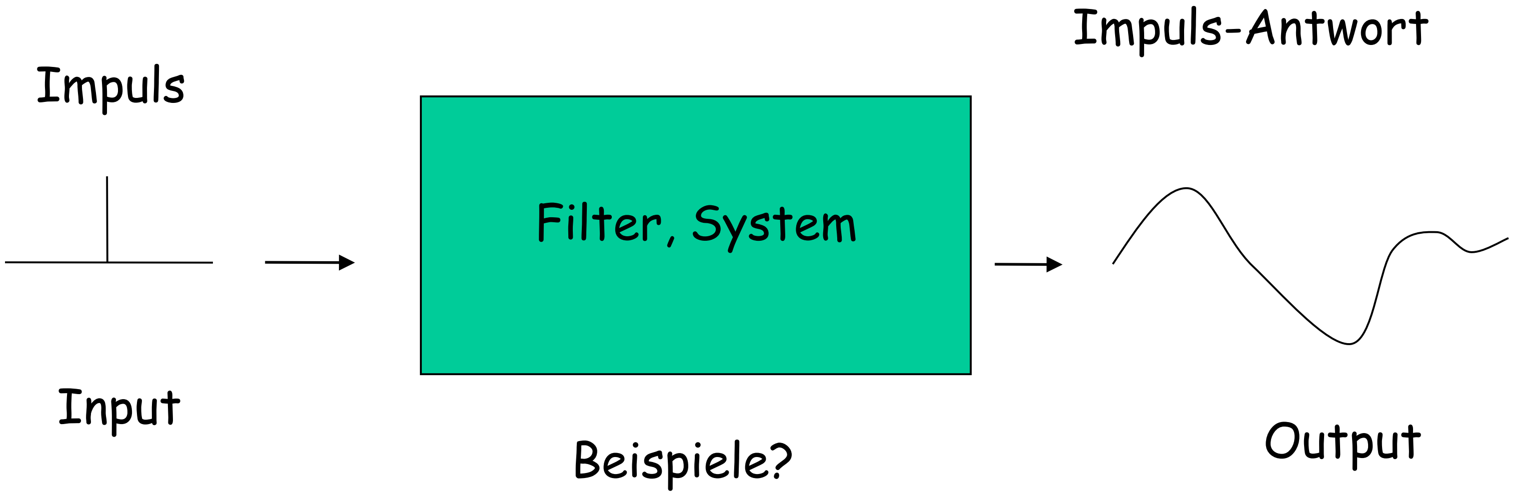
Convolution – Deconvolution

Faltung - Dekonvolution

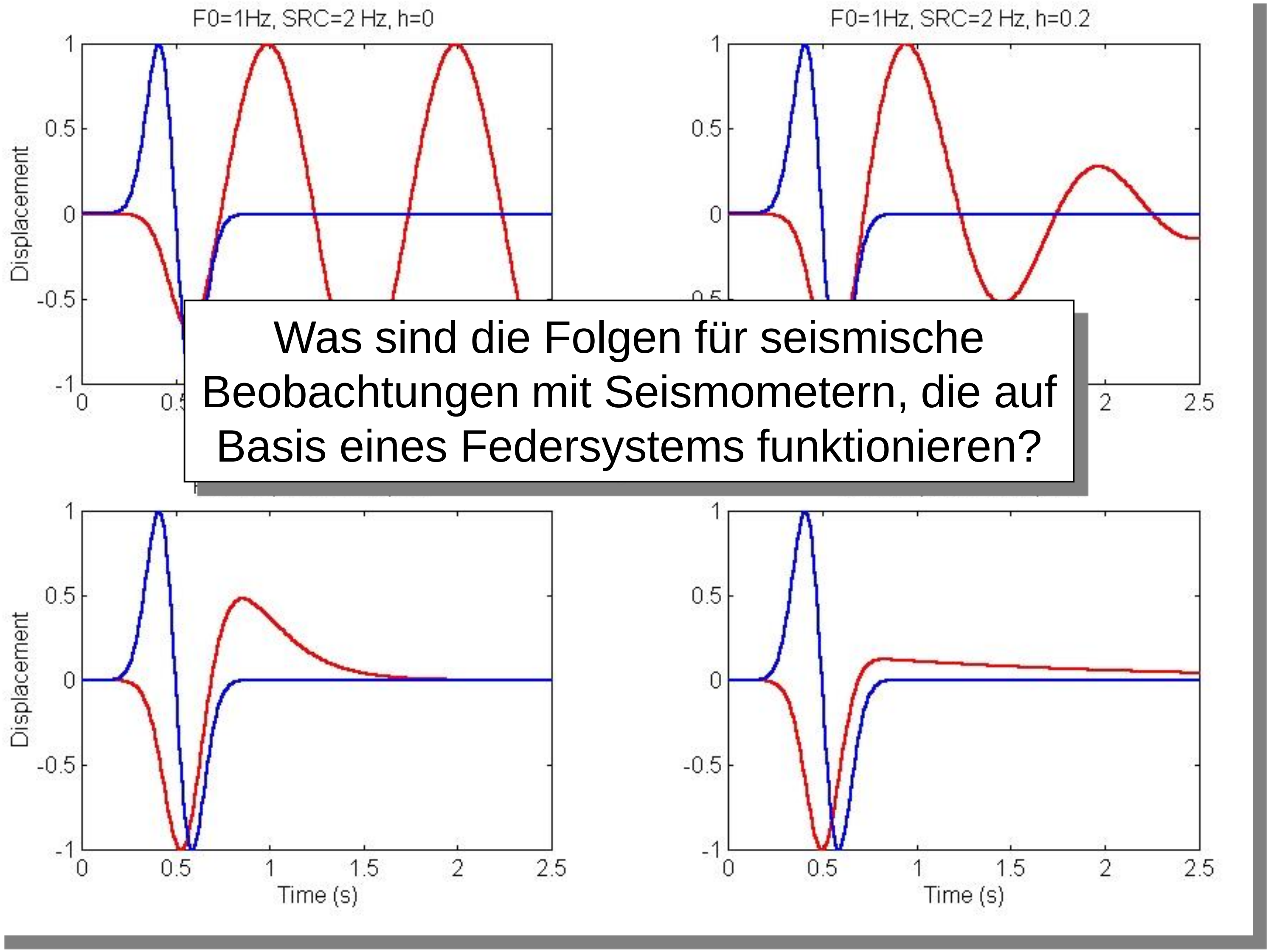
Bearbeiten von Wellenformen – Lineare Systeme

Wie müssen wir unsere digitalisierten Daten behandeln, um Information zu entnehmen? Diese Frage führt uns direkt zu den Konzepten der (De-) Konvolution (Faltung), (Auto-, Kreuz-) Korrelation und Filterung.

Das zentrale Konzept ist die Ausgabe eines Systems auf einen eingegebenen Impuls. Die Impuls-Antwort

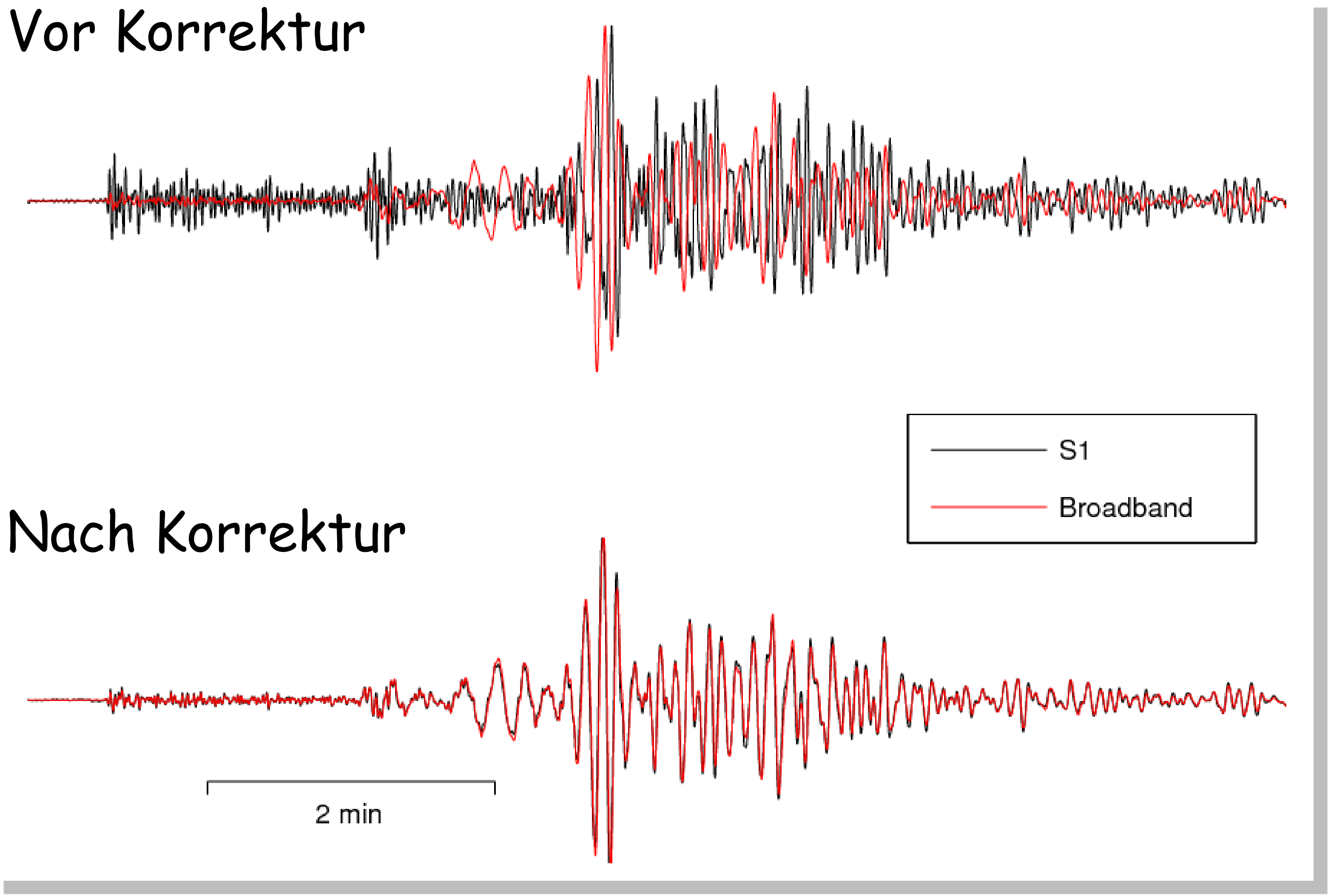


Beispiel: Impuls-Antwort eines Seismometers



Was sind die Folgen für seismische Beobachtungen mit Seismometern, die auf Basis eines Federsystems funktionieren?

Beispiel: Instrumentkorrektur



Diskrete Konvolution (Faltung)

Konvolution (Faltung) ist die mathematische Beschreibung der Änderung der Form eines Eingabesignals nach dem Durchlaufen eines Filters (Filtersystem, lineares System)

Es gibt ein eigenes mathematisches Symbol für Konvolution:

$$y(t) = g(t) * f(t)$$

Hier ist die Impuls-Antwort Funktion g gefaltet mit dem Eingangssignal f. g wird auch „Greensche Funktion“ genannt.

$$y_k = \sum_{i=0}^{m} g_i f_{k-i} \qquad g_i \quad i = 0,1,2,\ldots,m$$

$$k = 0,1,2,\ldots,m+n \qquad f_j \quad j = 0,1,2,\ldots,n$$

Faltung Beispiel (Matlab)

```
>> x
x =
     0     0     1     0
>> y
y =
     1     2     3
>> conv(x,y)
ans =
     0     0     1     2     3     0
```

Impuls-Response

System Input

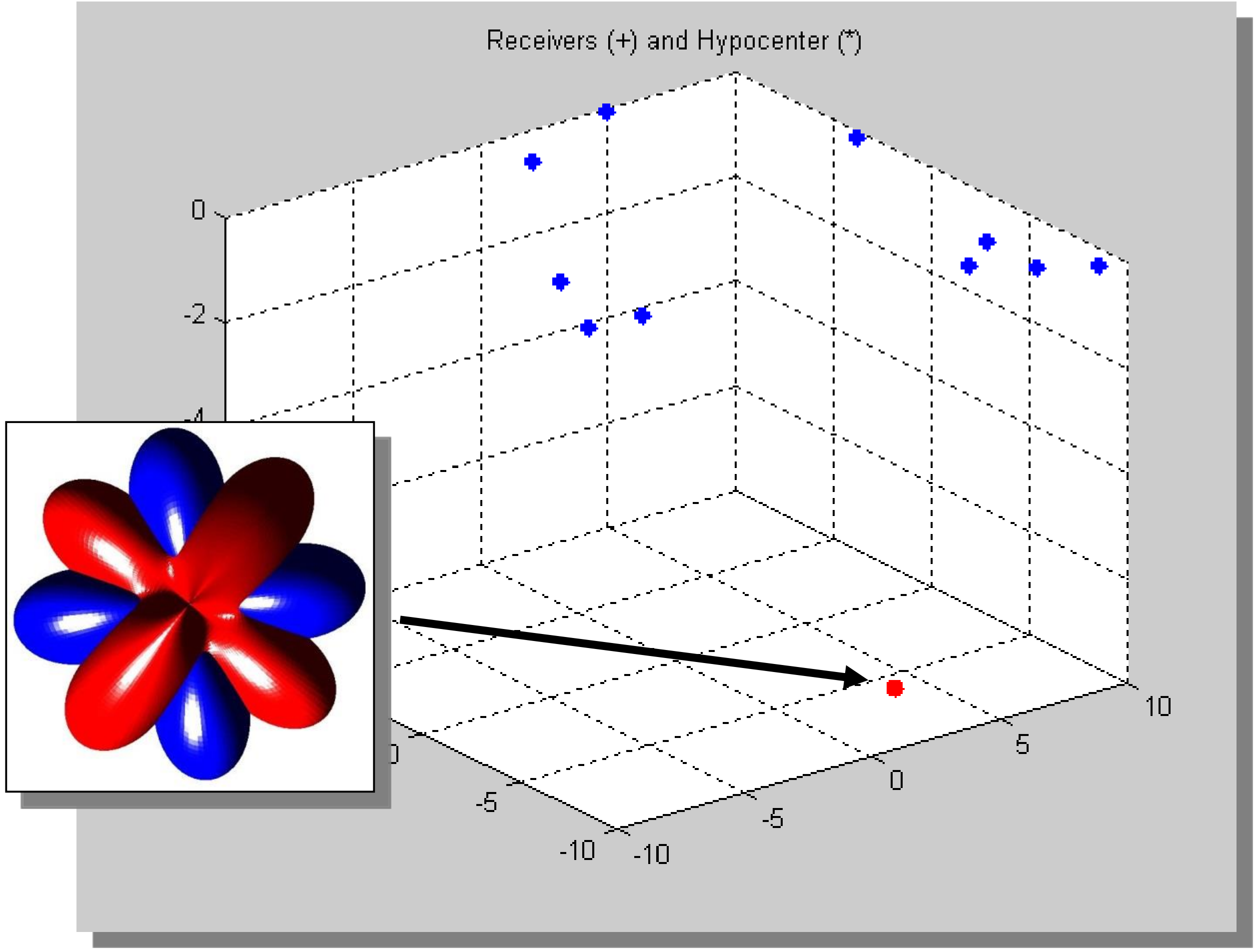
System Output

Faltung Beispiel

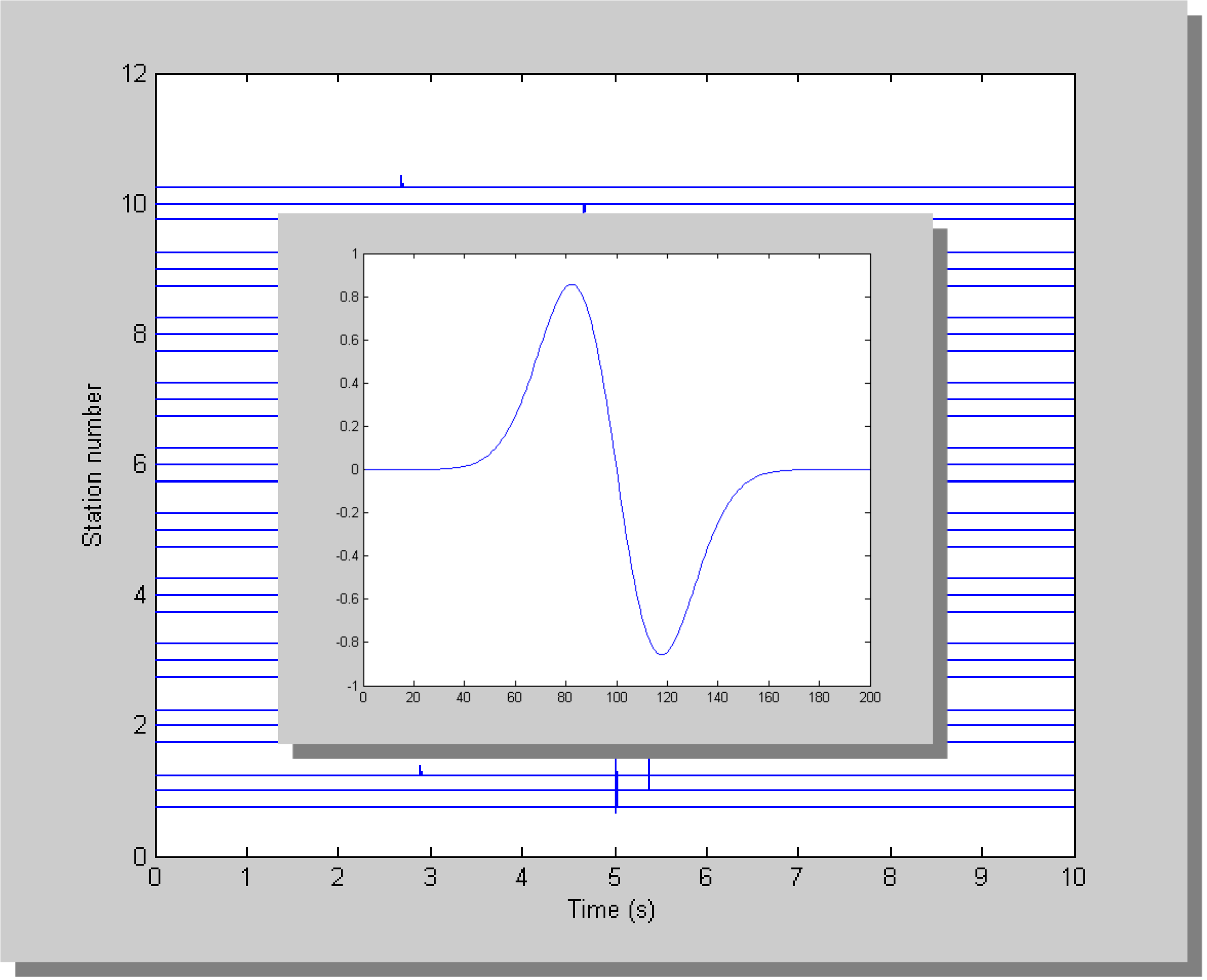
x „Faltung“ y x*y

								x*y
		0	1	0	0			0
					1	2	3	
		0	1	0	0			0
				1	2	3		
		0	1	0	0			1
			1	2	3			
		0	1	0	0			2
		1	2	3				
		0	1	0	0			3
	1	2	3					
		0	1	0	0			0
1	2	3						

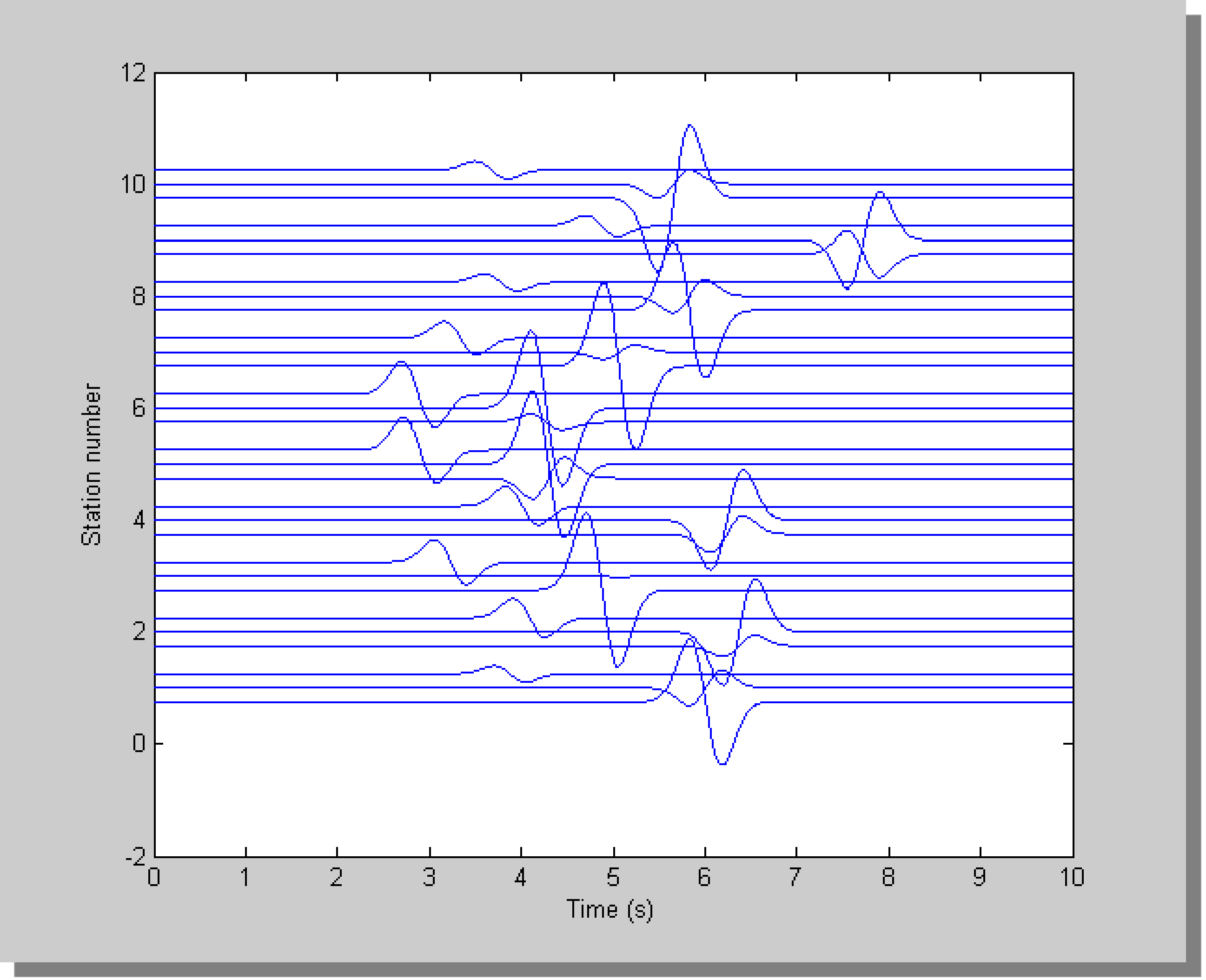
Konvolutionsmodell:
Seismogramme



Die seismische *Impuls-Antwort*

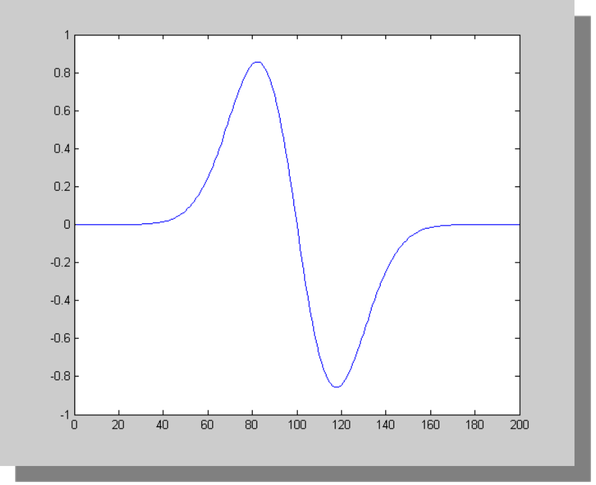


Die gefilterte (gefaltete) Antwort



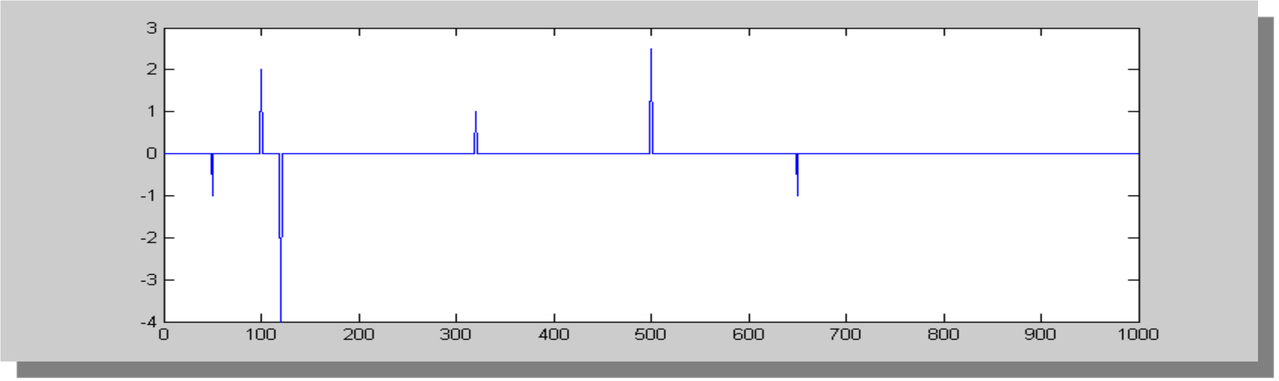
1D Konvolutionsmodell einer seismischen Spur

Das Seismogramm eines geschichteten Mediums kann ebenso mit einem Konvolutionsmodel berechnet werden ...



$$u(t) = s(t) * r(t) + n(t)$$

u(t)	Seismogramm
s(t)	Quellfunktion (Anregungsfunktion)
n(t)	Rauschen
r(t)	Reflektivität



Übung

III Faltung, Konvolution: diskrete Form

$$y_k = \sum_{i=0}^{m} g_i f_{k-i}$$

$$k = 0,1,2,\dots,m+n$$

$$g_i \qquad i = 0,1,2,\dots,m$$

$$f_j \qquad j = 0,1,2,\dots,n$$

Berechnen Sie (mit Hand!) die Faltung y_k der beiden Vektoren g={0 1 2 3} und f={1 2 1}. Machen Sie zuerst eine Tabelle mit Index und Wert der Vektoren. Für welche Prozesse in der Seismik/Seismologie ist die Faltung von Bedeutung?

Tip: Machen Sie erst Tabelle

Was ist m?
Was ist n?
Was is m+n?

	0	1	2	3	4	5	6
g	0	1	2	3			
f	1	2	1				
y							

Der Faltungssatz (Convolution theorem)

FT -> Fourier Transform

$$F(\omega) = FT\left[f(t)\right]$$
$$G(\omega) = FT\left[g(t)\right]$$
$$Y(\omega) = FT\left[y(t)\right]$$

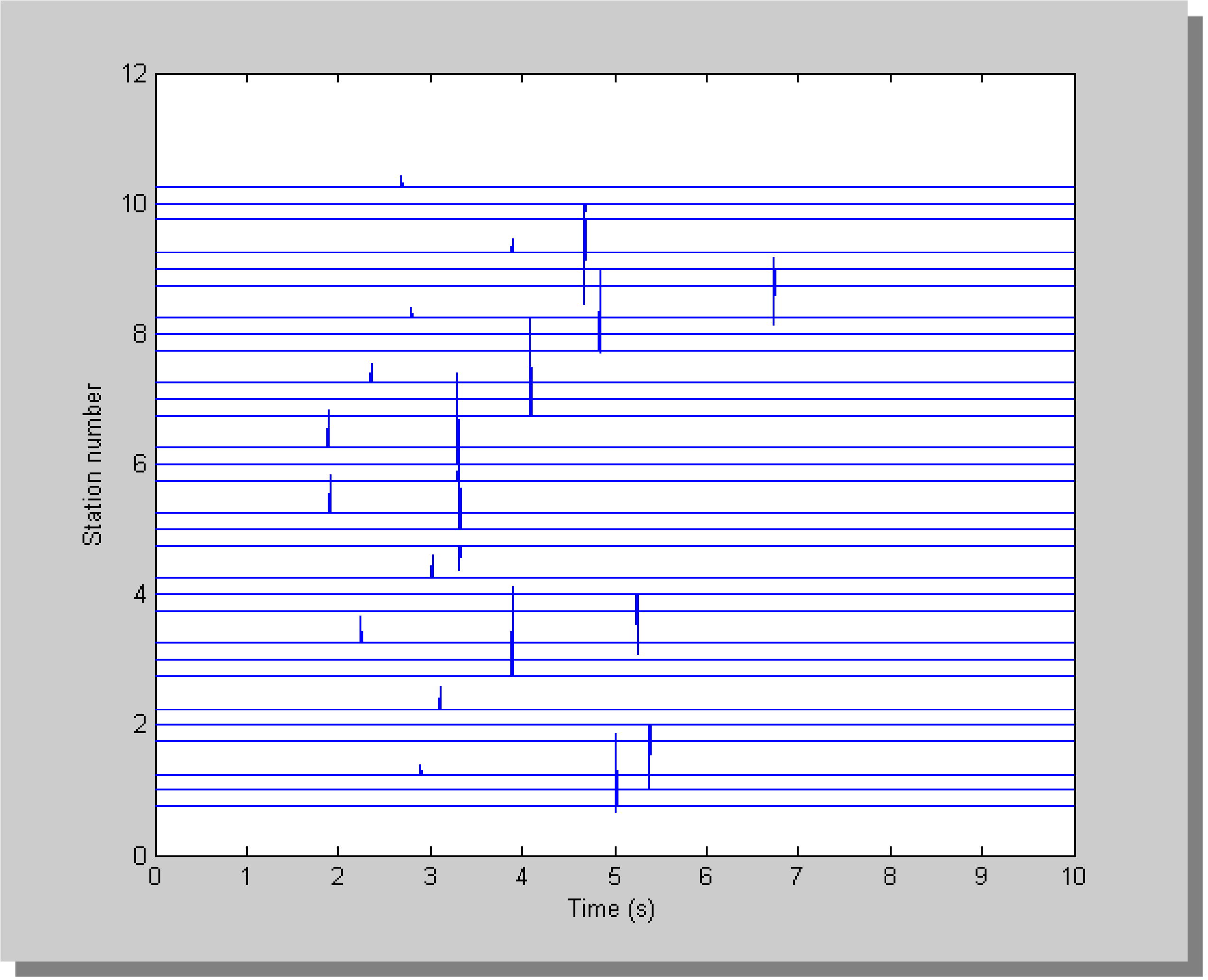
Eine Faltung in der Zeit entspricht einer Multiplikation im Frequenzbereich (und umgekehrt)!

Zeitbereich	Spektralraum
$y(t) = g(t) * f(t)$	$Y(\omega) = G(\omega)F(\omega)$
$y(t) = g(t)f(t)$	$Y(\omega) = G(\omega) * F(\omega)$

Dieser Satz spielt für die Praxis der Zeitreihenanalyse eine wichtige Rolle!
Beispiele an der Tafel.

Dekonvolution

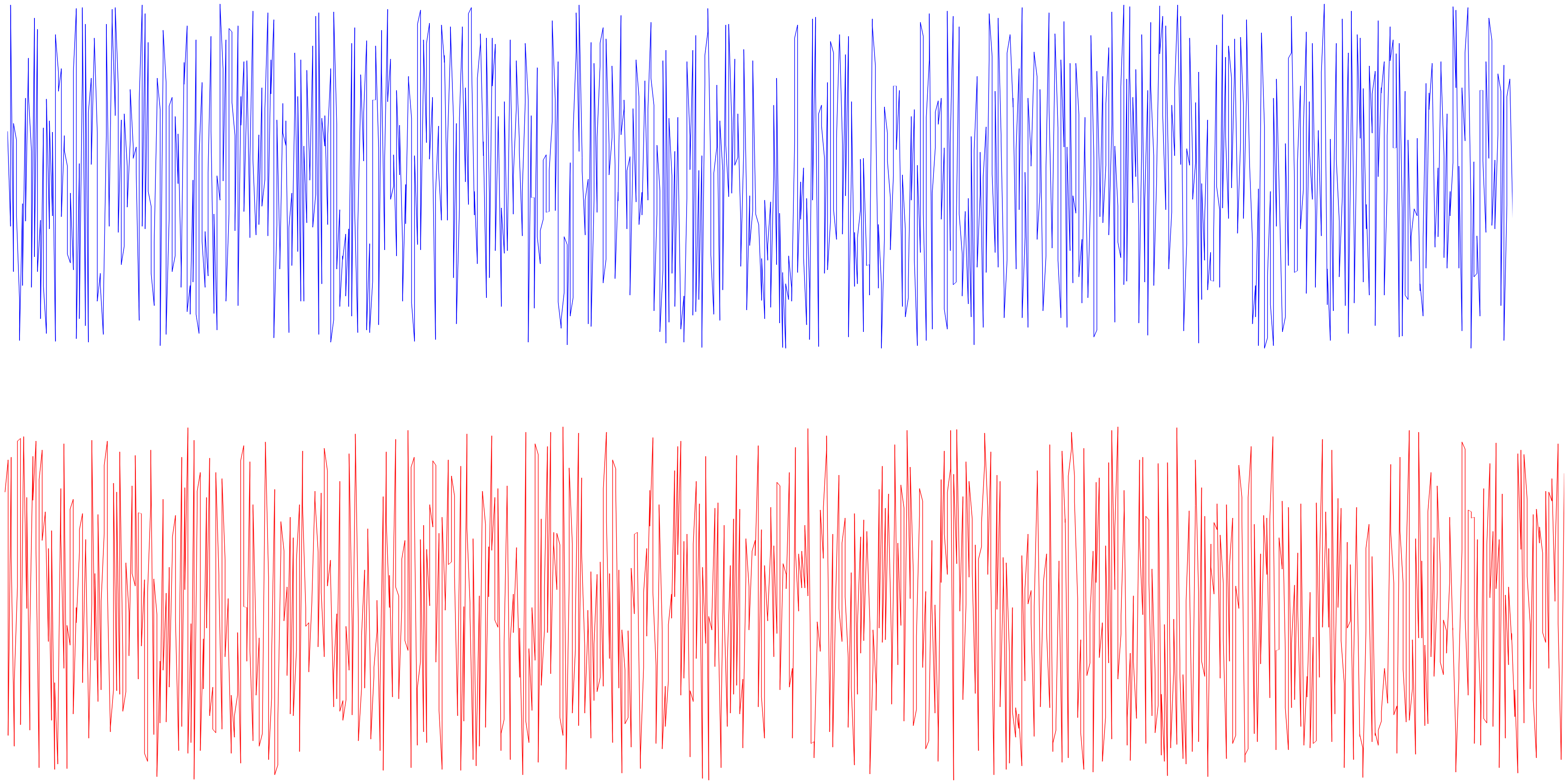
Dekonvolution ist die Inversion der Konvolution.
Wann ist eine Dekonvolution nützlich?



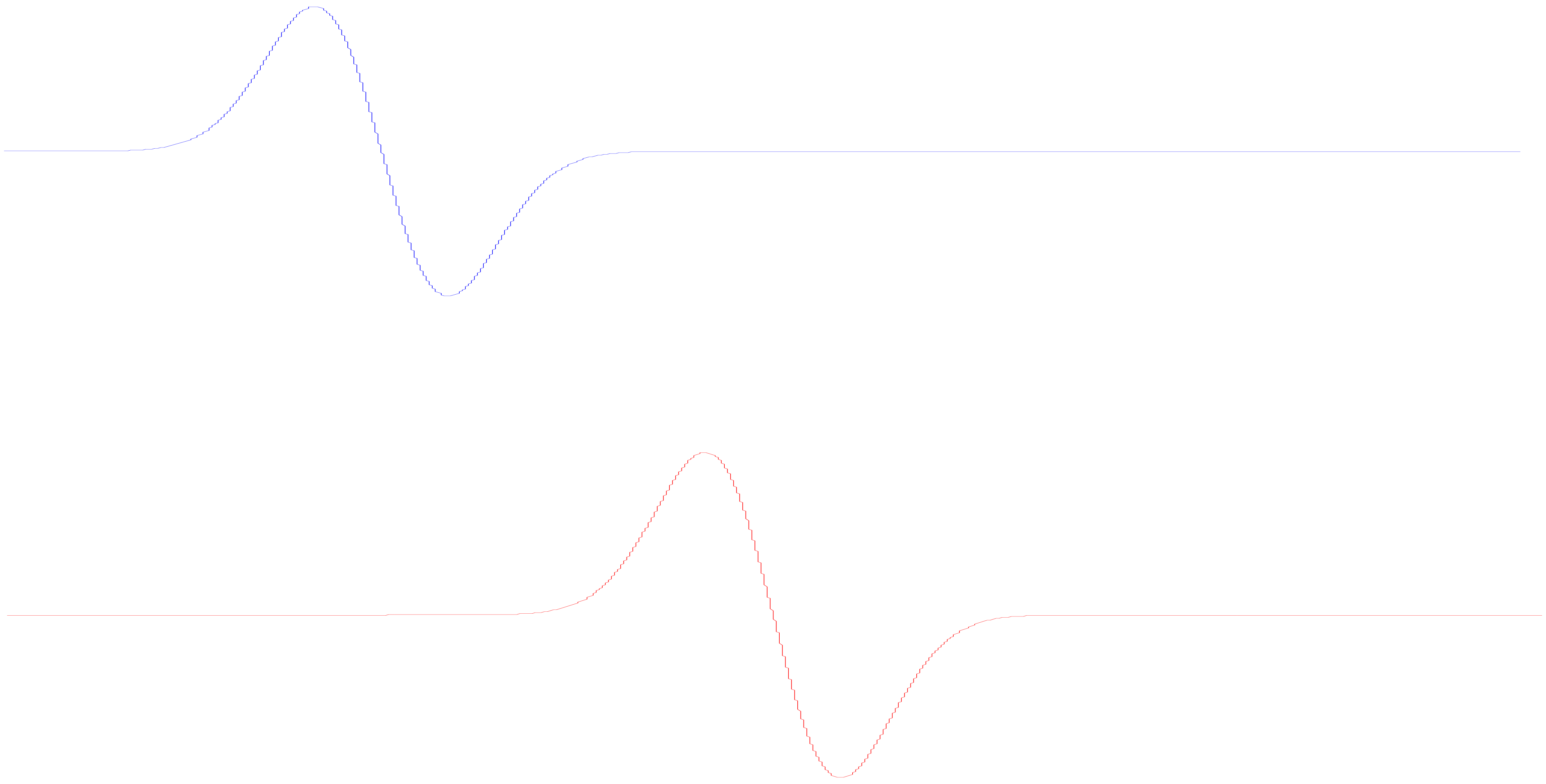
Correlation

Korrelation

Ähnlich?



Verschoben?



Korrelation

Korrelation spielt eine zentrale Rolle bei der Studie von Zeitreihen. Normalerweise gibt die Korrelation eine quantitative Abschätzung der Ähnlichkeit zweier Funktionen und den zeitlichen/räumlichen Versatz zwischen ihnen an. Die Korrelation zwischen den Vektoren g und f (beide mit n Elementen) ist definiert durch:

$$r_k = \sum_{i=1}^{n} f_{k+i} g_i$$

$$k = -m, \ldots, 0, \ldots, m$$

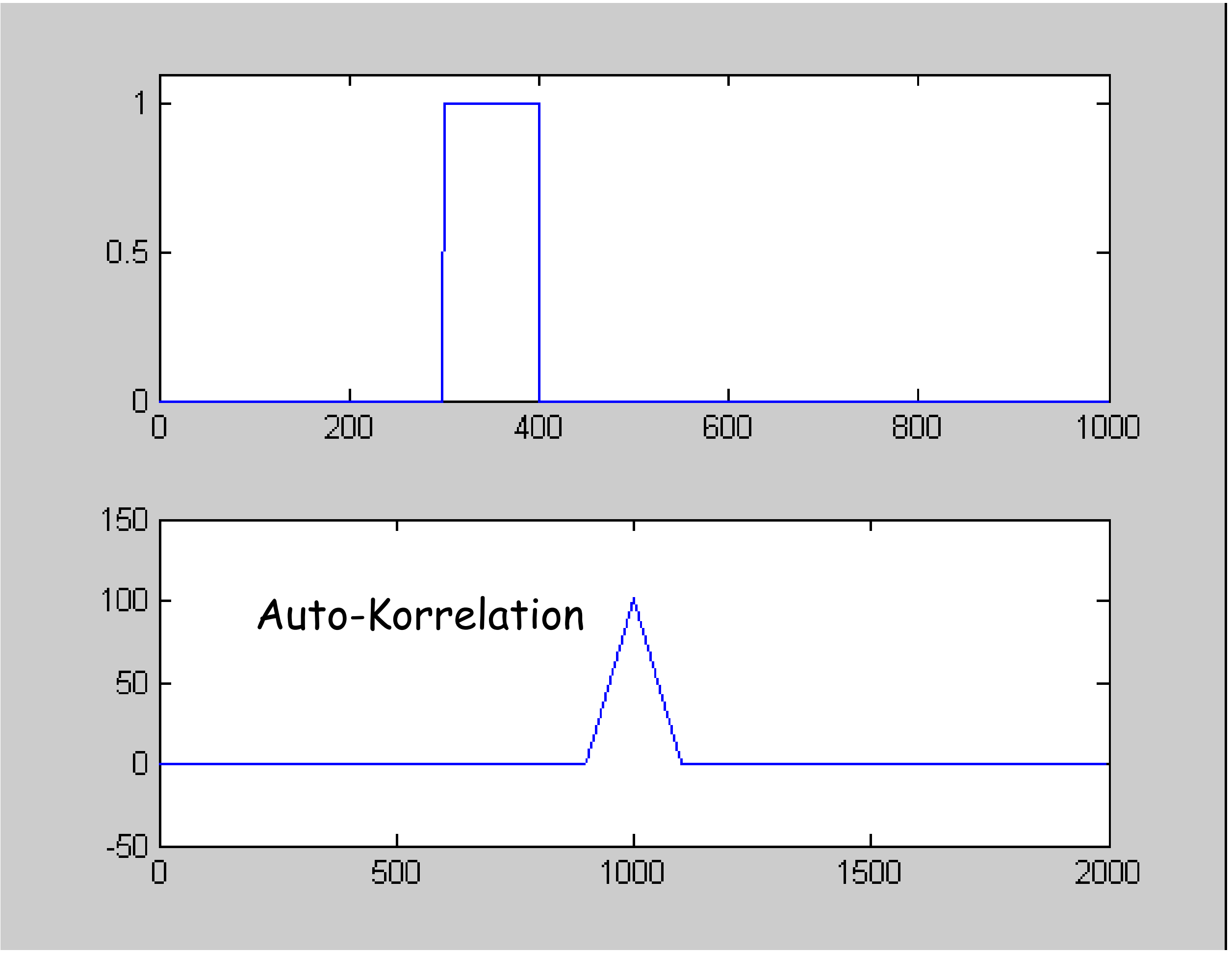
$$m = n - 1$$

m nennt man auch max lag (Verzögerung)

Beispiel (Matlab)

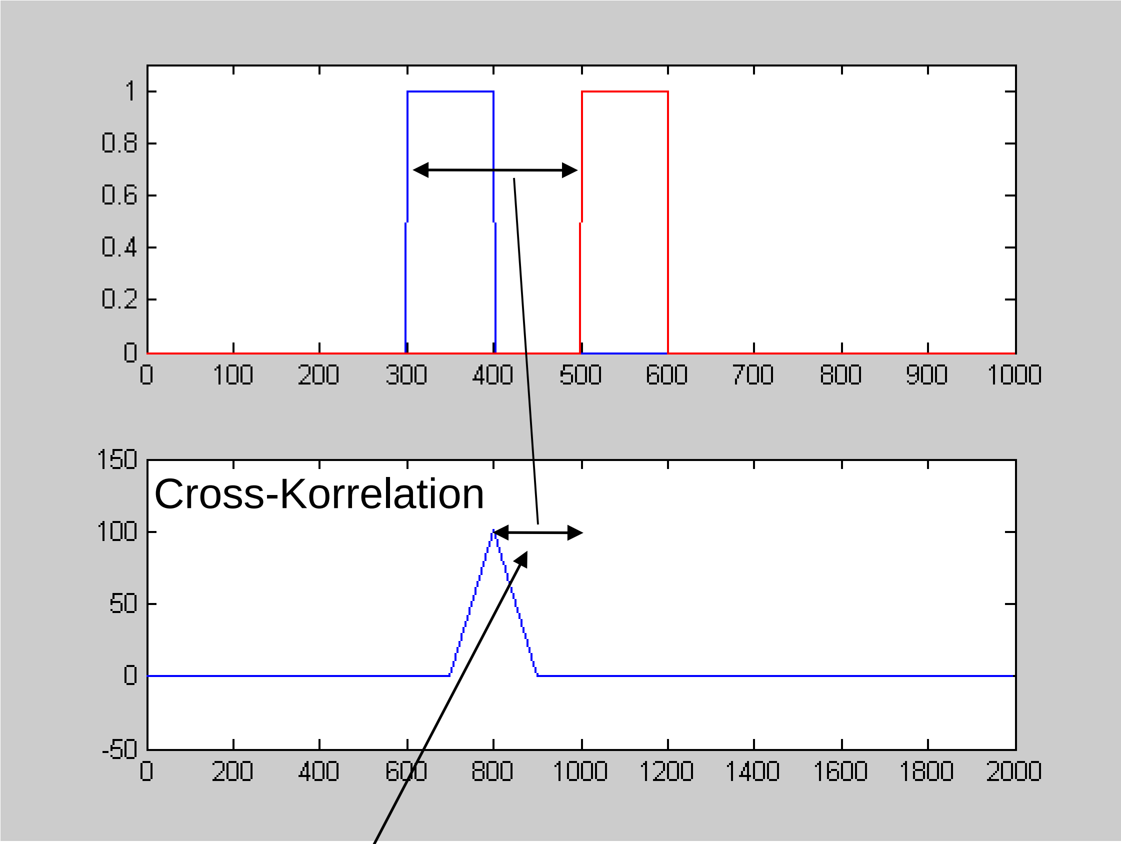
```
>> x=[1 3  2]
x =
     1     3     2
>> y=[1  2 1]
y =
     1     2     1
>> xcorr(x,y)
ans =
    1.0000    5.0000    9.0000    7.0000    2.0000
>>
```

Auto-Korrelation



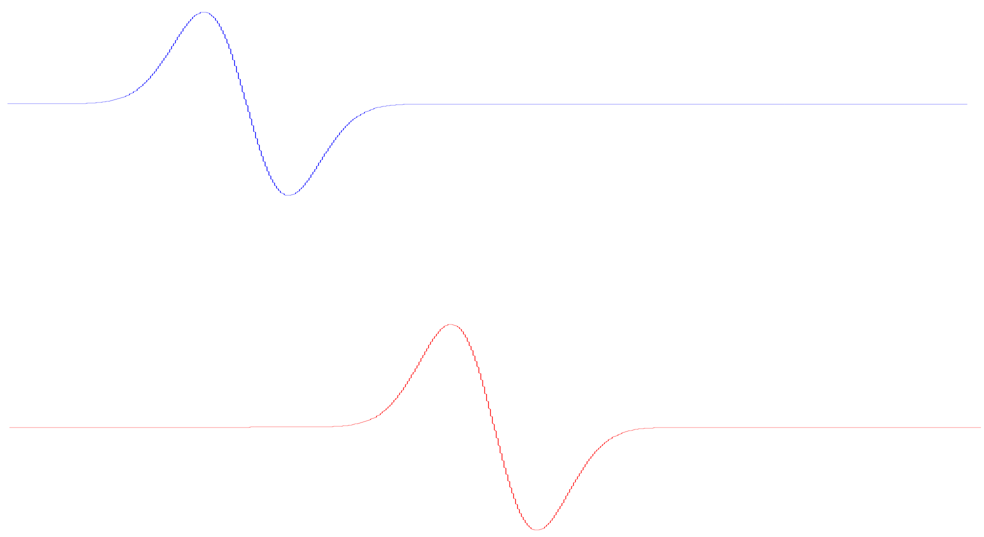
Für einen Vektor der Länge n hat die Korrelation die Länge 2n-1. Bei der Autokorrelation ist das Maximum bei n (perfekte Übereinstimmung)

Kreuz-Korrelation

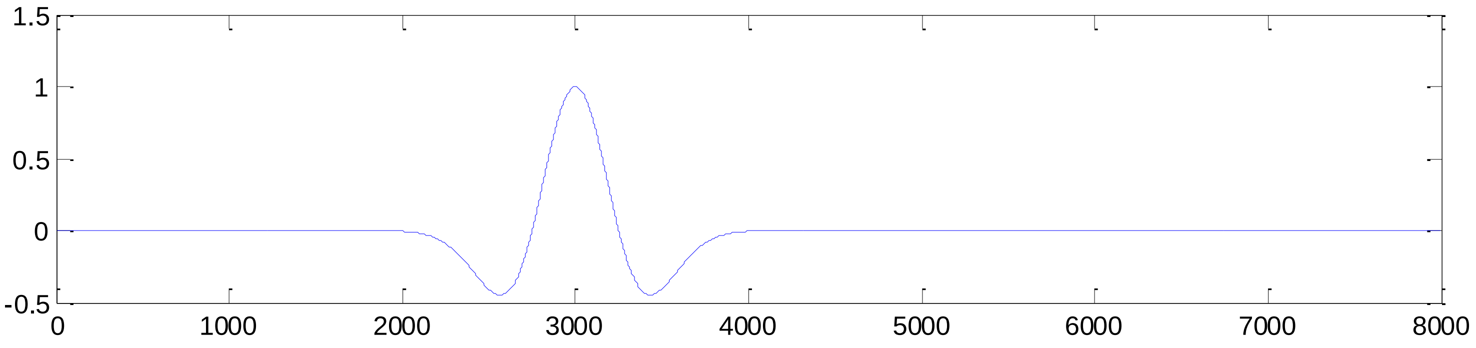


Lag (in diesem Fall 200) zwischen zwei Funktionen

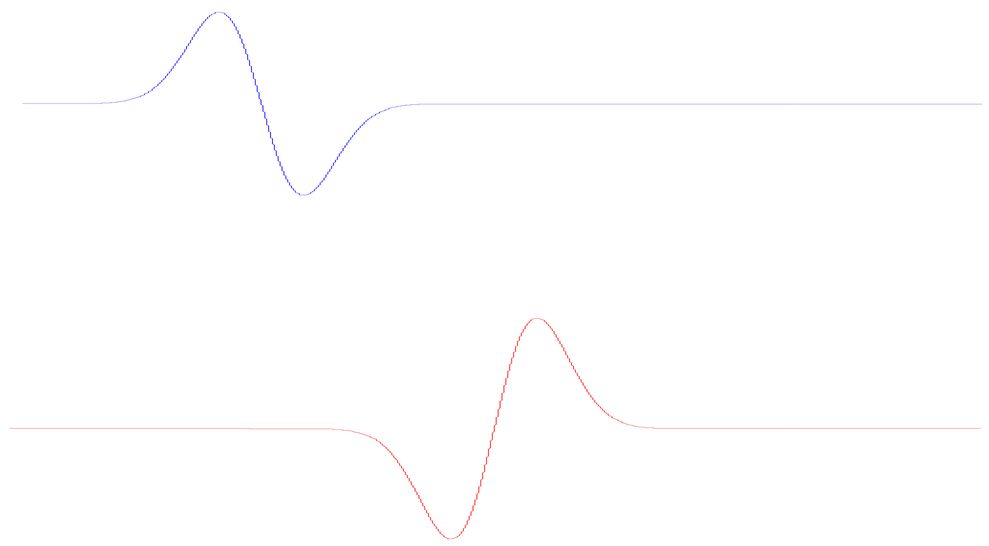
Seismogrammbeispiel



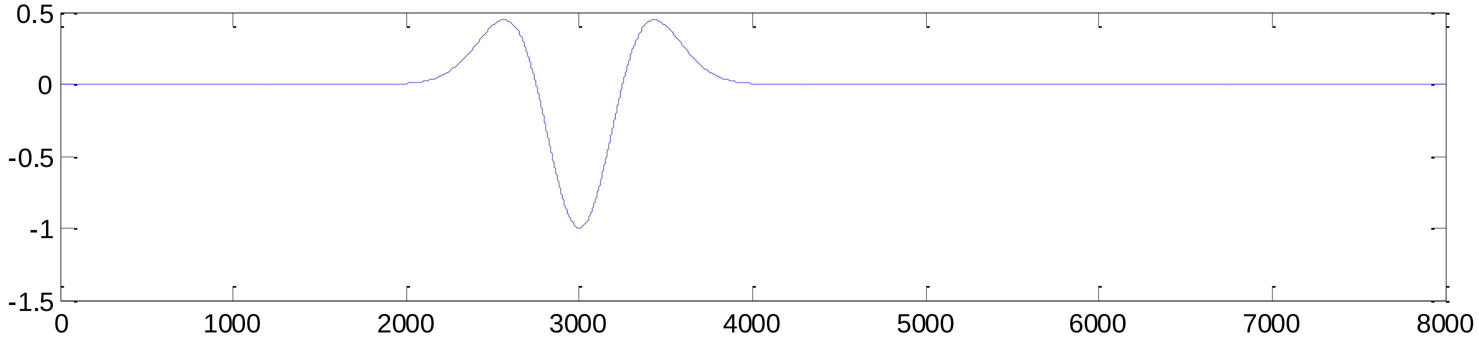
Kreuzkorrelation der roten und blauen Zeitreihe (Länge 4000 samples).
-> Automatisierte Bestimmung von Laufzeitdifferenzen



Seismogrammbeispiel - Antikorrelation

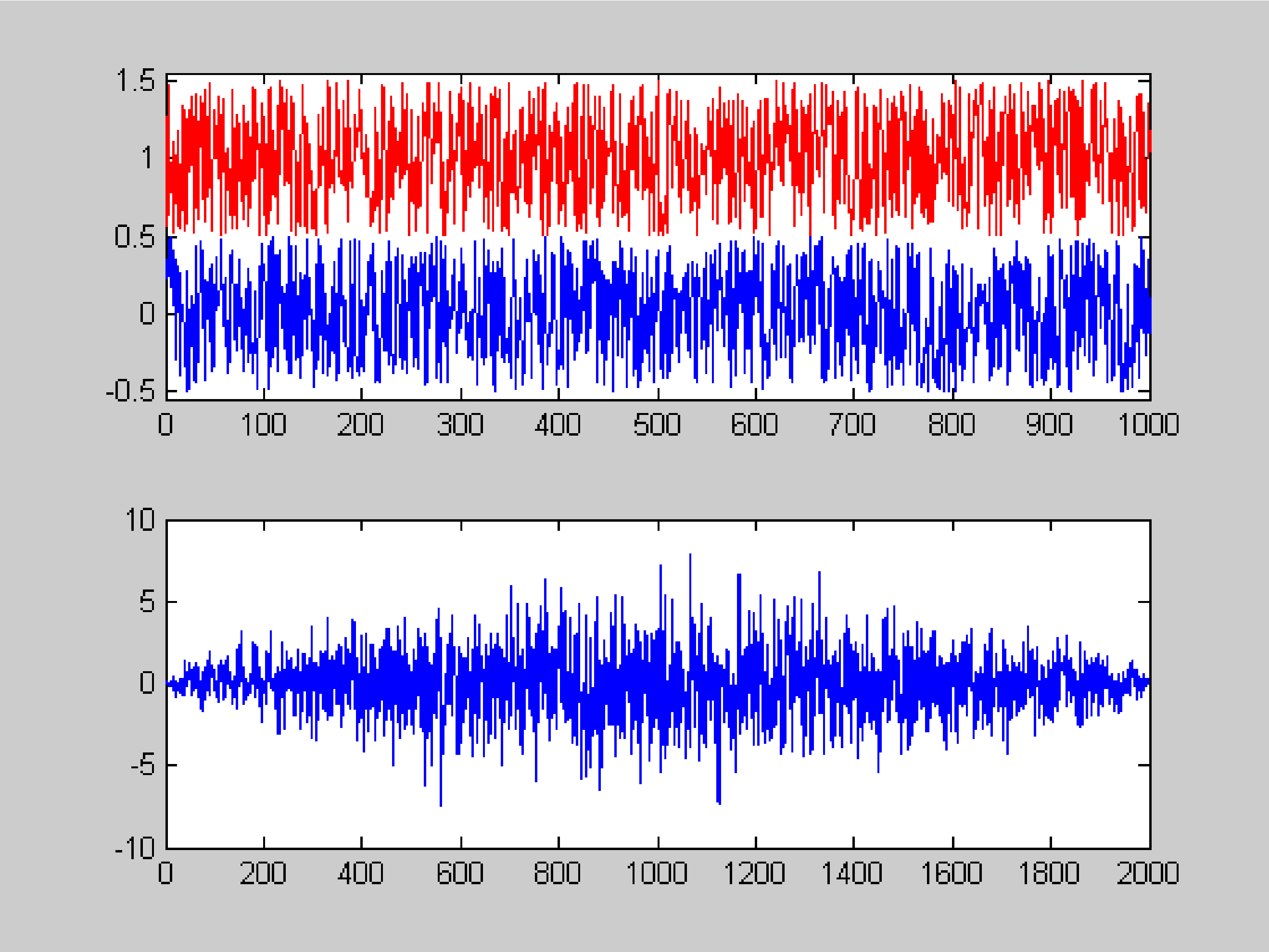


Kreuzkorrelation der roten und blauen Zeitreihe (Länge 4000 samples).
-> Antikorrelation (Beispiele?)



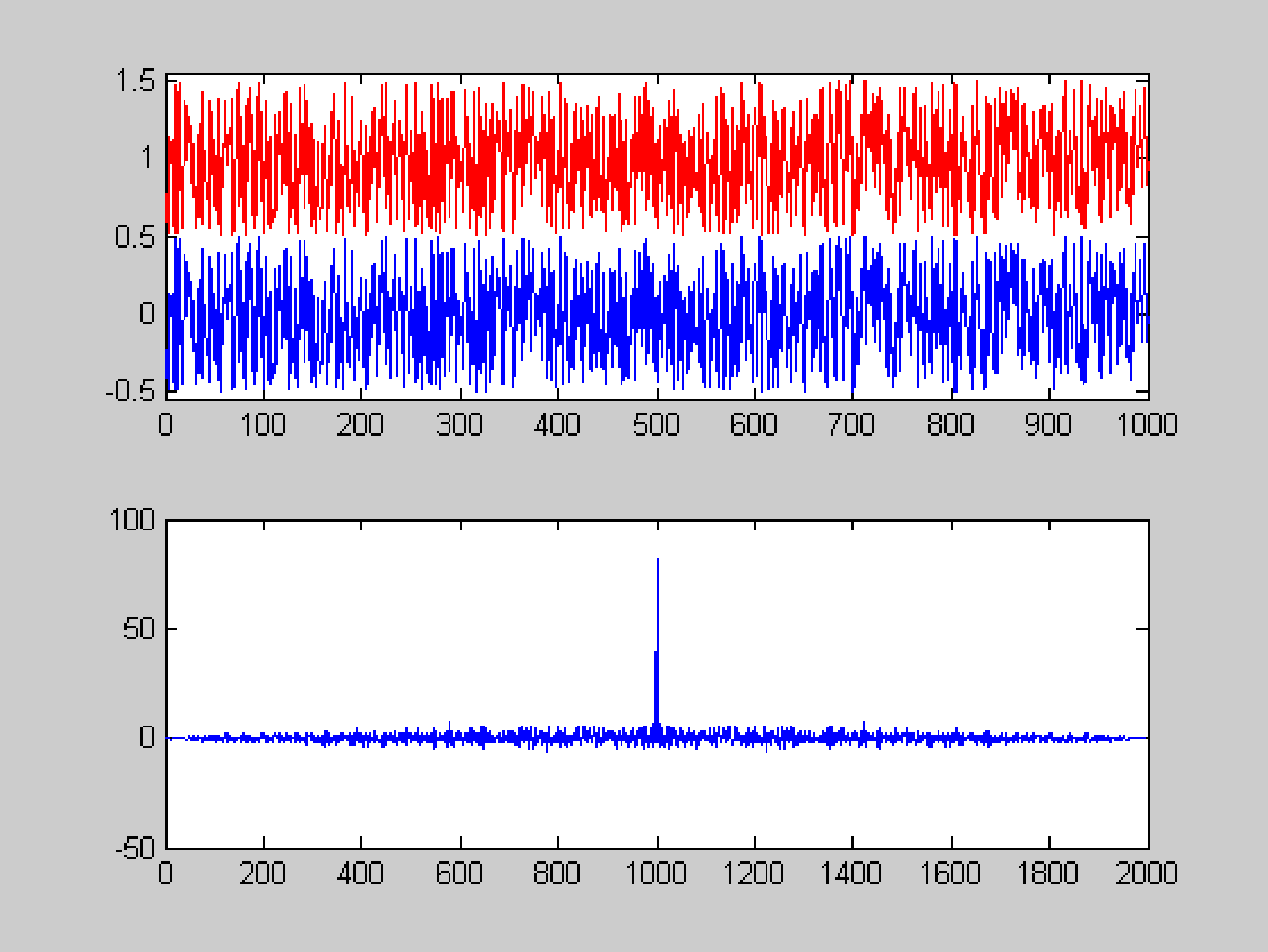
Kreuz-Korrelation

Zufallsfunktionen



Korrelation zwei verschiedener Zufallszeitreihen

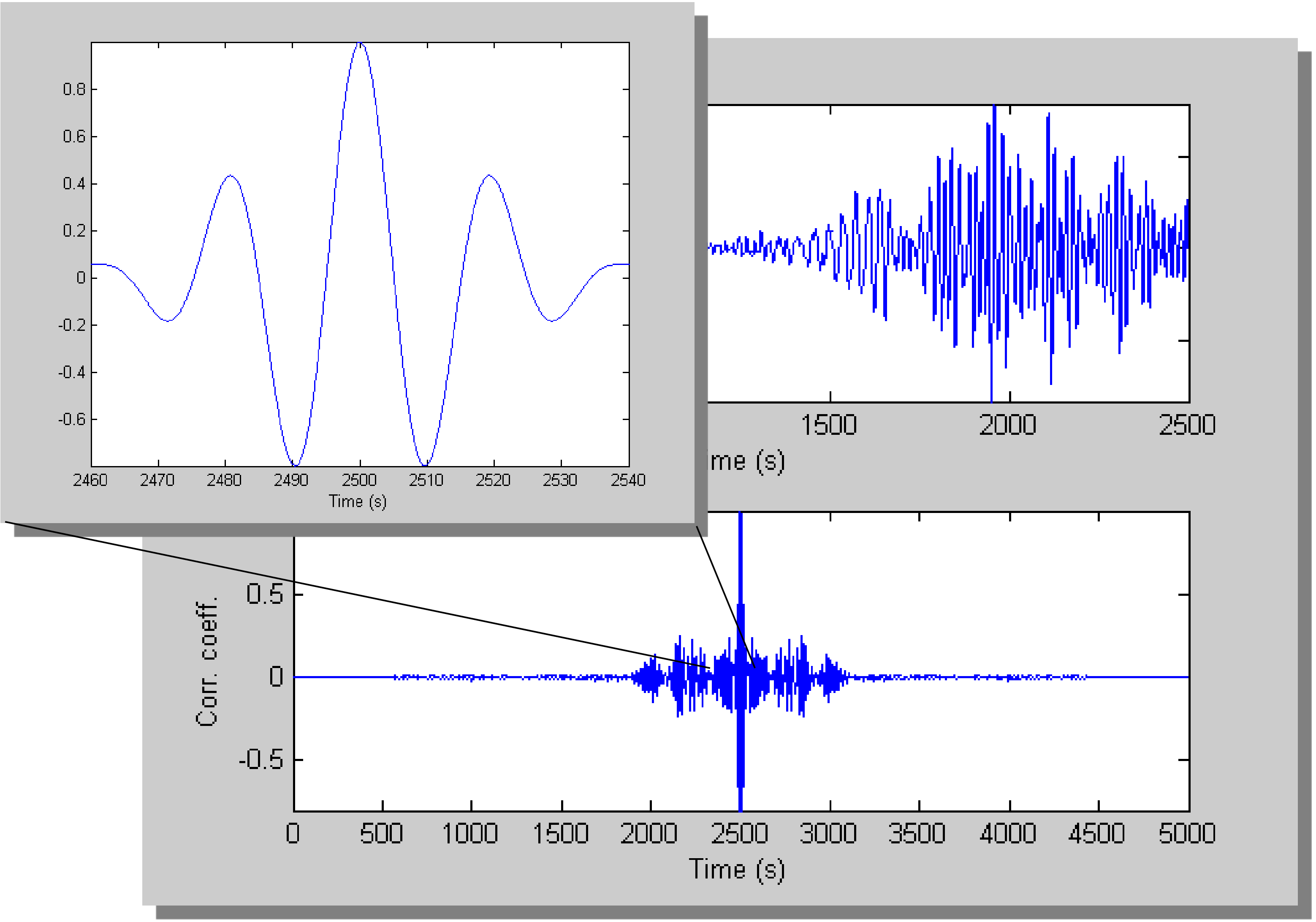
Auto-Korrelation
Zufallsfunktion



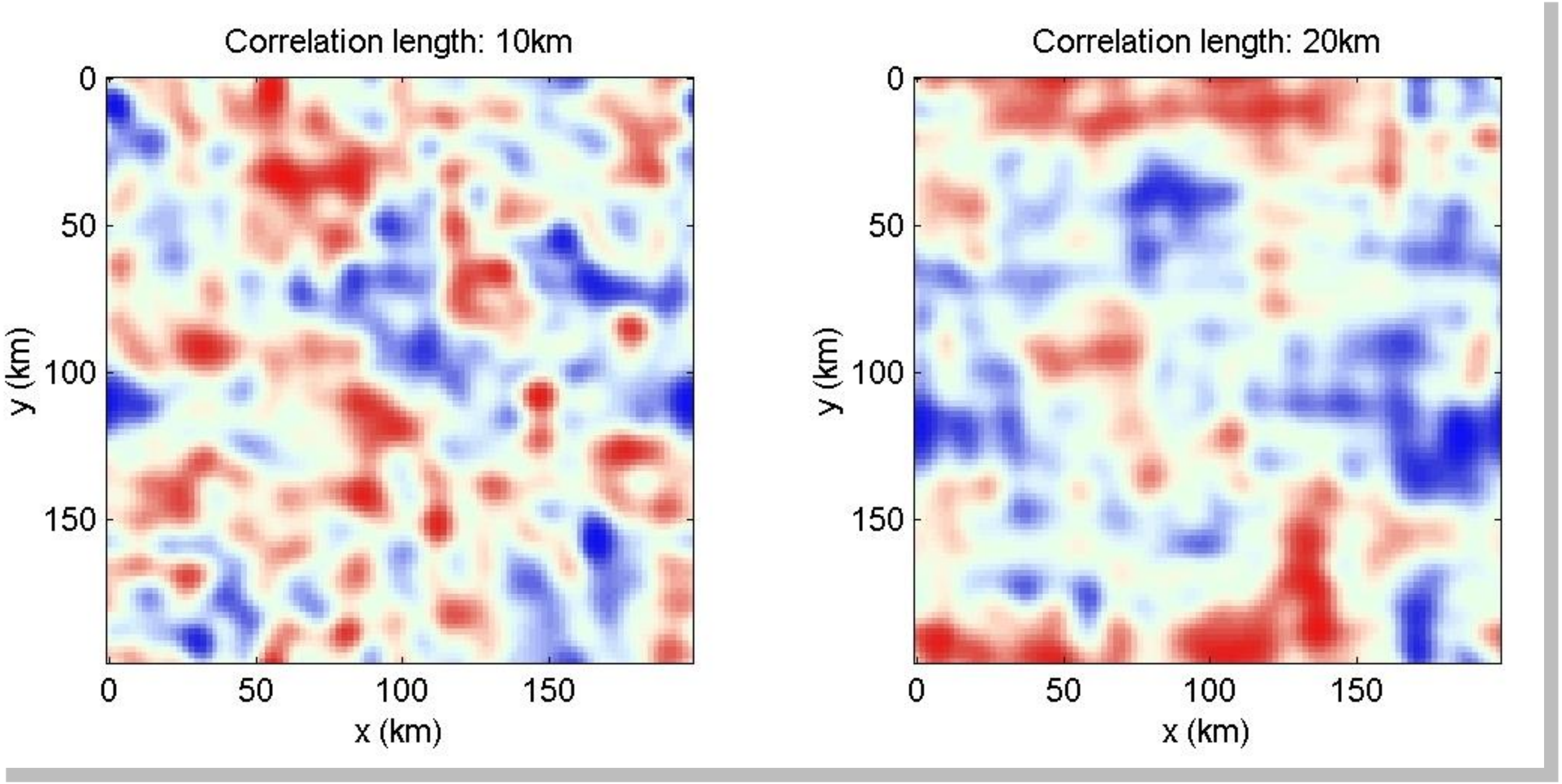
Korrelation zwei gleicher Zufallszeitreihen -> „Deltafunktion"

Auto-Korrelation

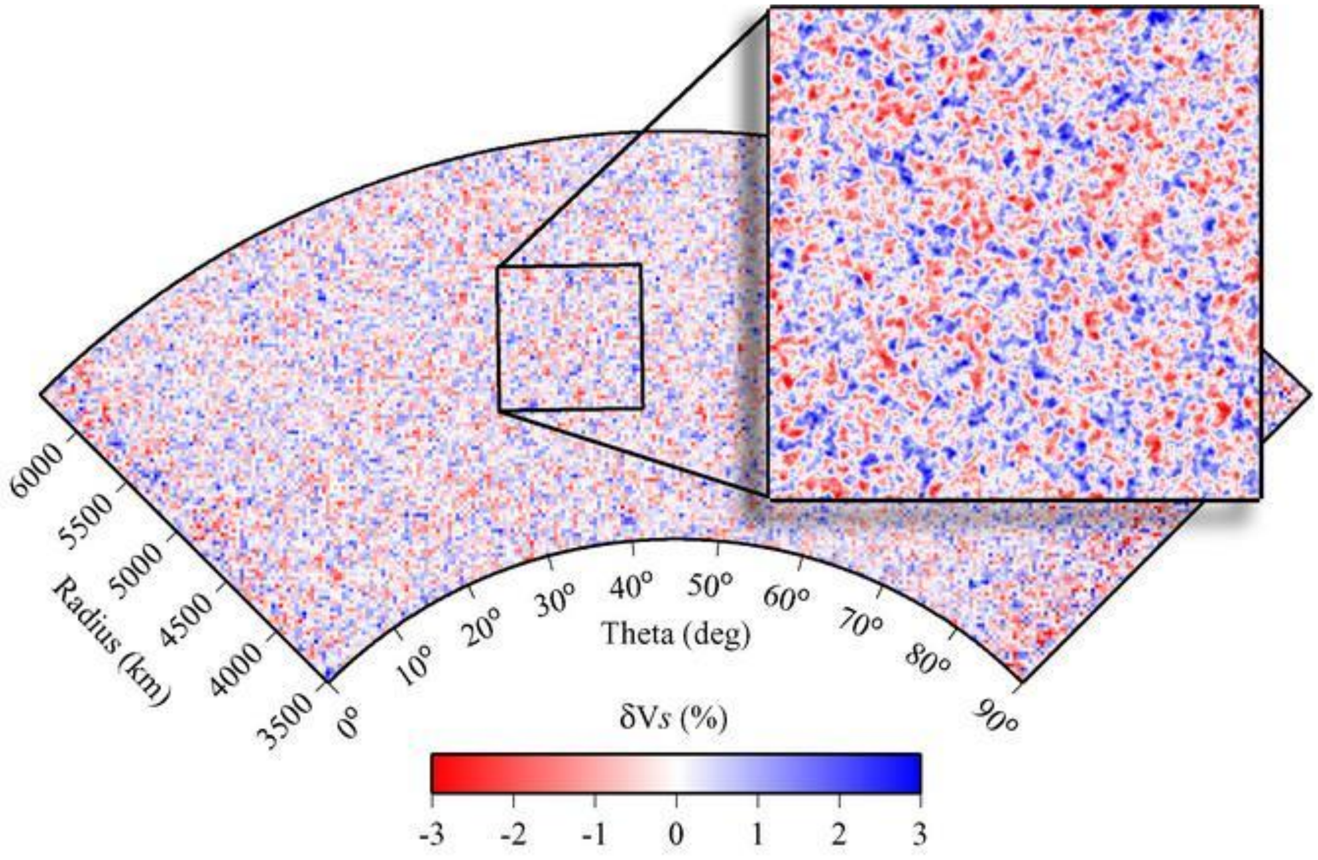
Seismisches Signal



Korrelationslänge
„Zufallsmedium“

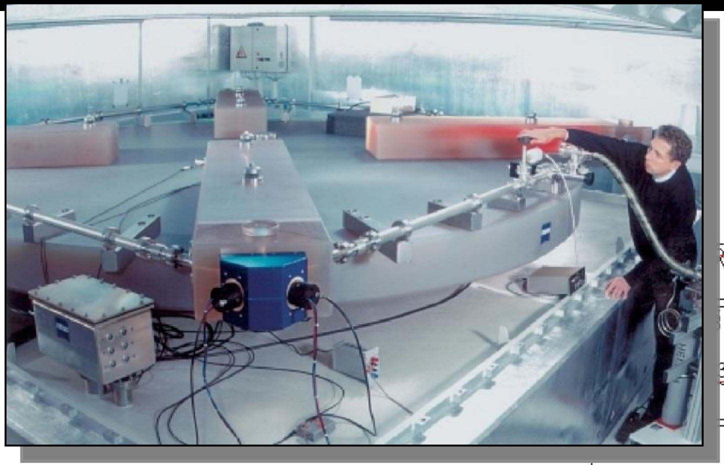


Korrelationslänge
„Zufallsmedium“



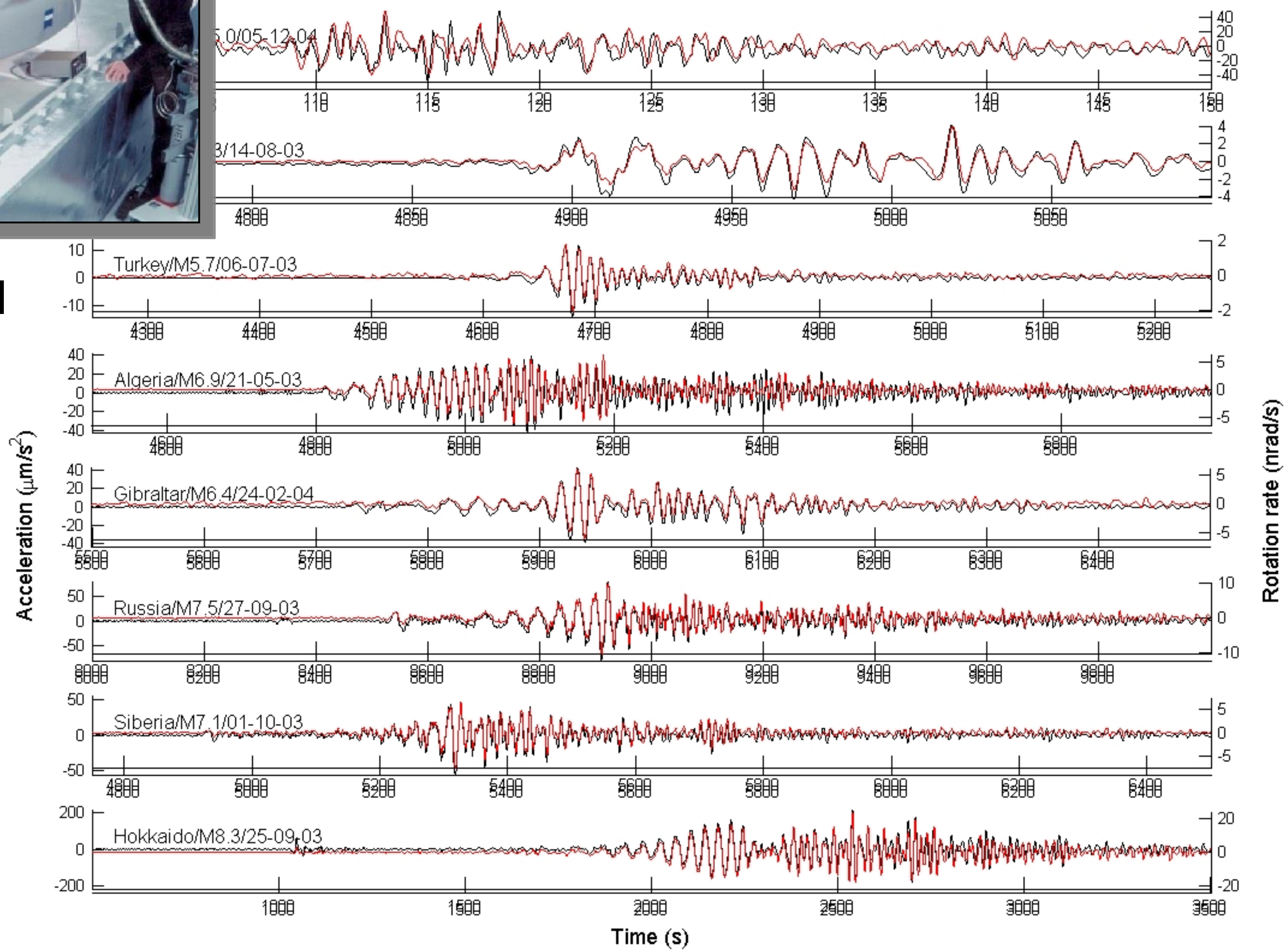
Exponential autocorrelation function. autocorrelation wavelength 32 km.
RMS S-wave velocity perturbation 1%.

Ähnlichkeit Rotationsrate und transversale Beschleunigung



Ring laser in Wettzell

Ringlaser Rotation – Seismogramm Beschleunigung



Berechnung des Korrelationskoeffizienten

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Zeigen Sie, wenn $y_i = x_i$ dann ist $r_{xy} = 1$
(positive Korrelation)

Zeigen Sie, wenn $y_i = -x_i$ dann ist $r_{xy} = -1$
(negative Korrelation)

Der Korrelationskoeffizient

Der Korrelationskoeffizient Kor(X,Y) ist eine Zahl zwischen -1 und 1, welche die Ähnlichkeit zweier Funktionen X und Y beschreibt.
Es gilt zum Beispiel:

Für beliebiges X
Kor (X,X) = 1
Kor(X,-X) = -1 (Anti-korrelation)

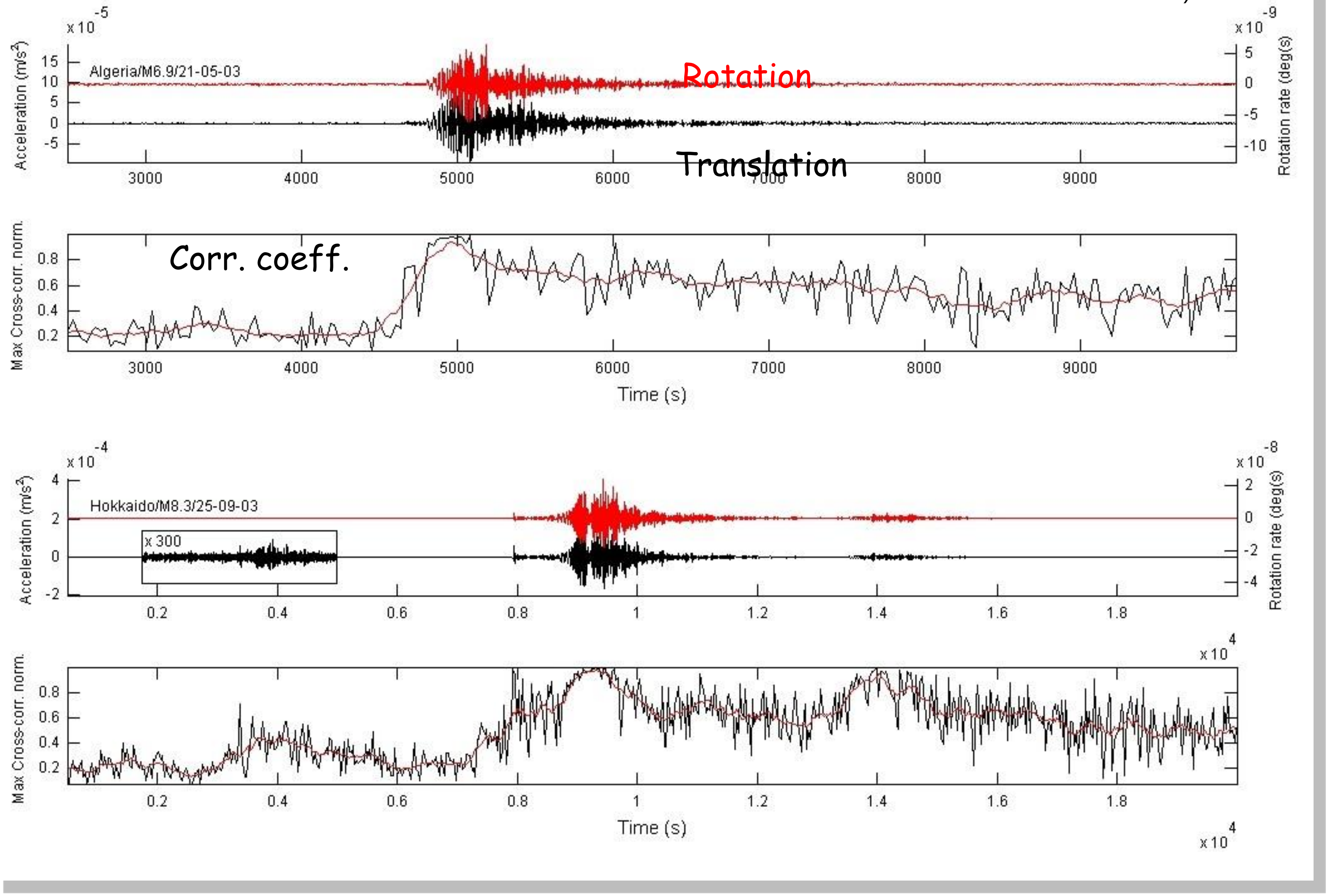
Kor(X,Y) << 1 wenn X,Y unabhängige Zufallsfunktionen sind

Korr(X,Y) = 1 wenn X und Y identisch

Ein Kor nahe 1 KANN einen kausalen Zusammenhang zwischen Phänomenen bedeuten (z.B. Regen -> Grundwasserspiegel; Regen -> Erdbeben; Sonnenflecken -> Klima)

Kreuz-Korrelation
ein Beispiel – “Ähnlichkeit”

Der Korrelationskoeffizient ist in einem Zeitfenster entlang der Zeitreithe (ca 2T $_{\text{dominant}}$) berechnet



Correlation: Solar forcing of climate?

Contents lists available at ScienceDirect

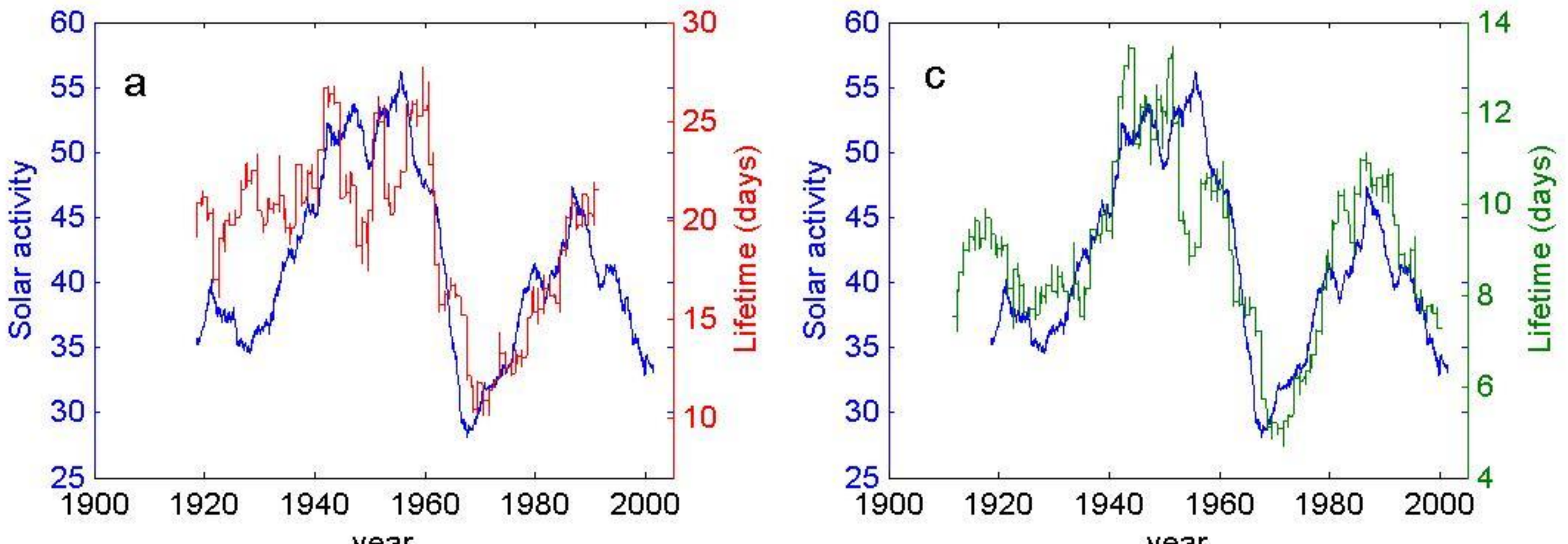
Journal of
Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jastp

Evidence for solar forcing in variability of temperatures and pressures in Europe

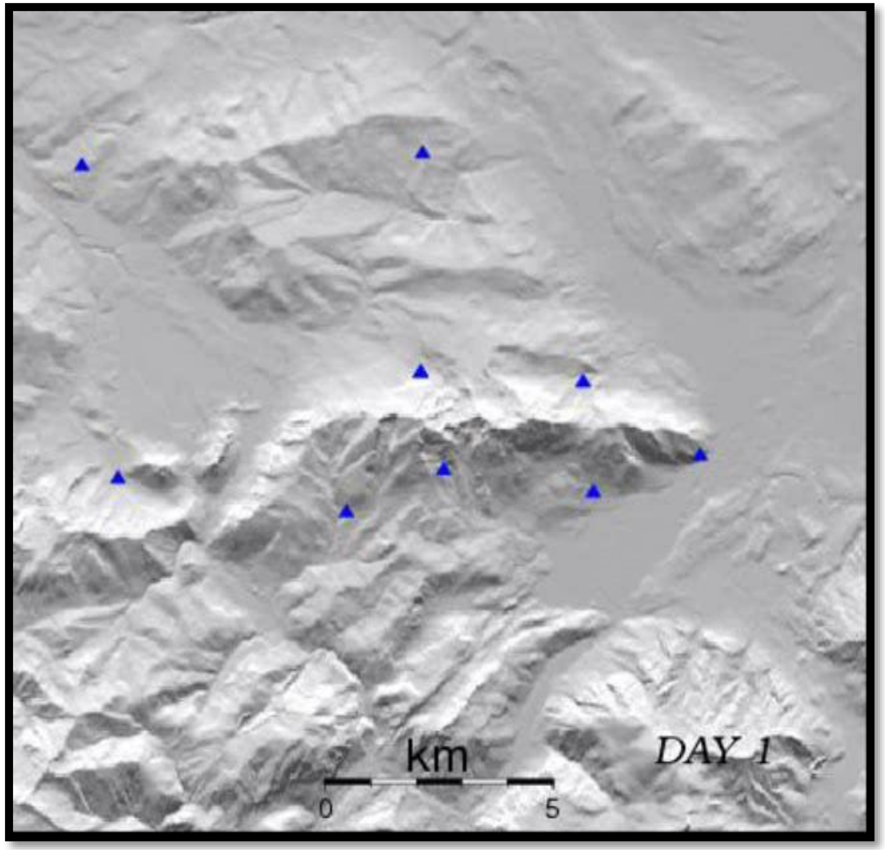
Jean-Louis Le Mouël[a], Elena Blanter[a,b], Mikhail Shnirman[a,b], Vincent Courtillot[a,*]

[a] Institut de Physique du Globe de Paris, Place Jussieu, Paris, France
[b] International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Moscow, Russia

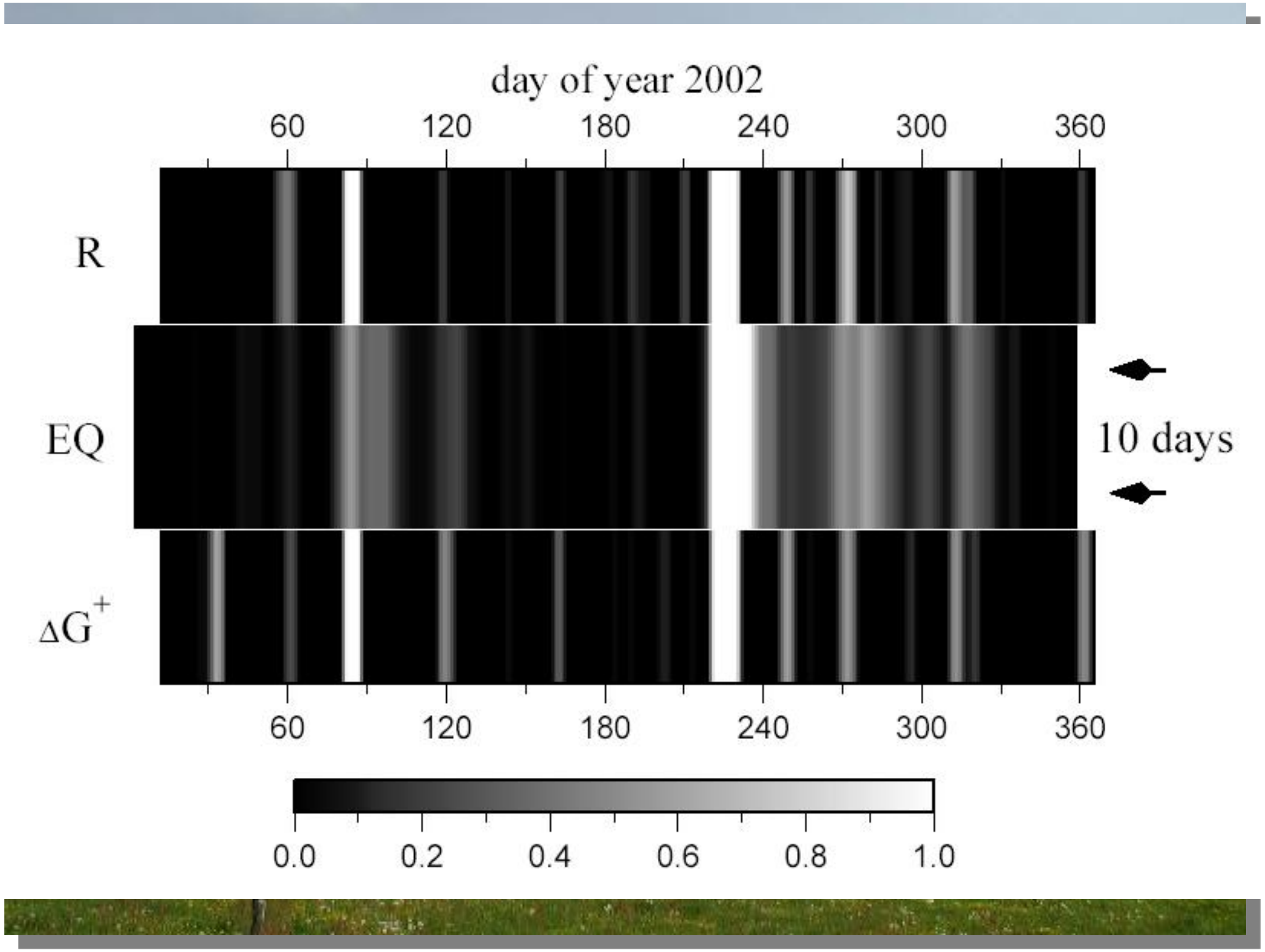


Seismizität 2002

... Die Regenfälle, die im August zum Hochwasser führten, hatten ihren Höhepunkt am Tag 218 ...



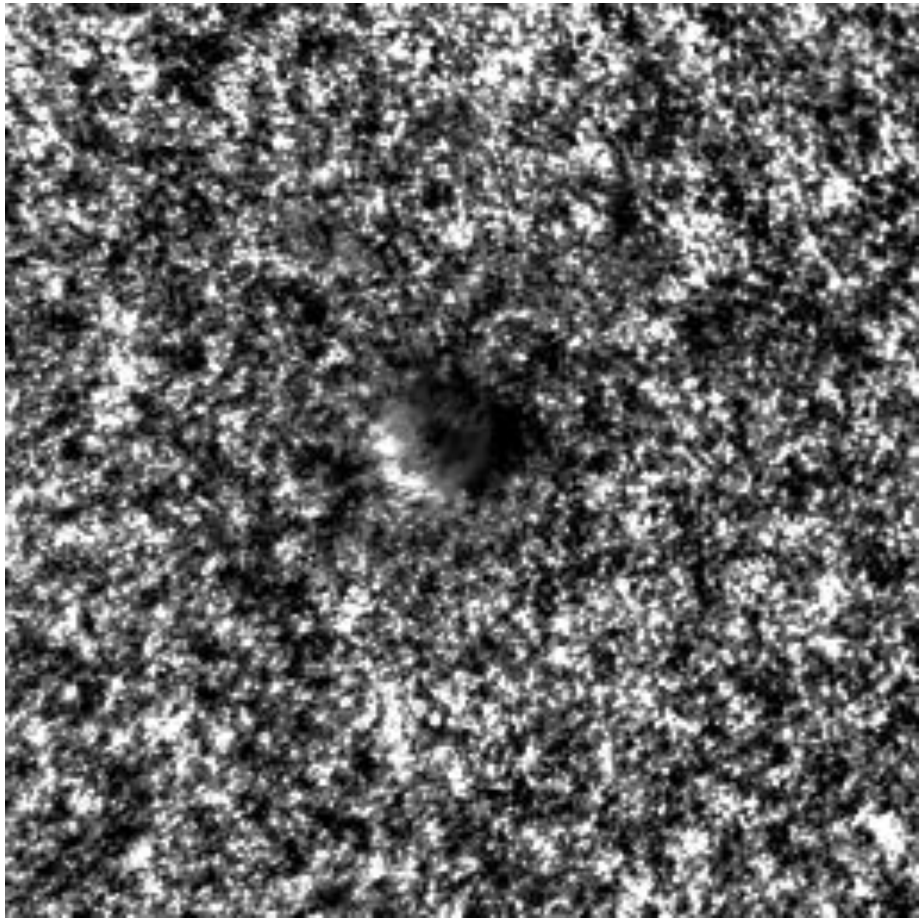
Externer Einfluss auf Erdbeben?



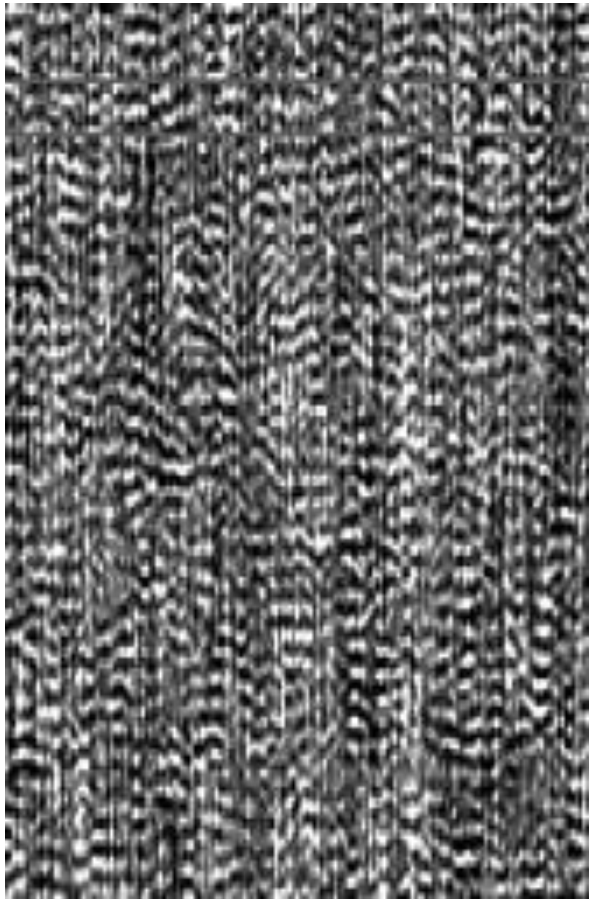
Correlating Seismic Noise

Die Power der Korrelationsanalyse: Helioseismologie

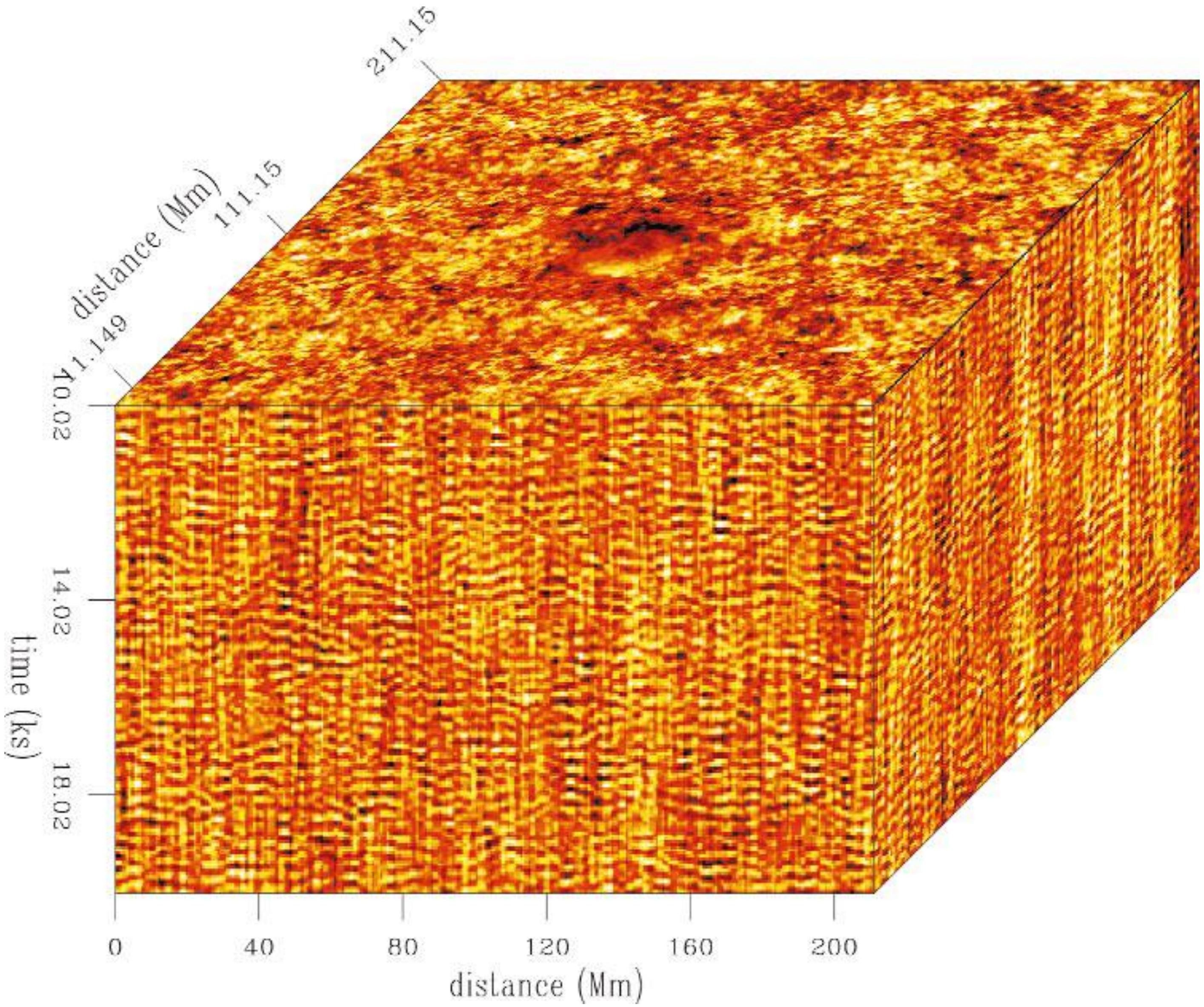
Sonnenflecken Helligkeit



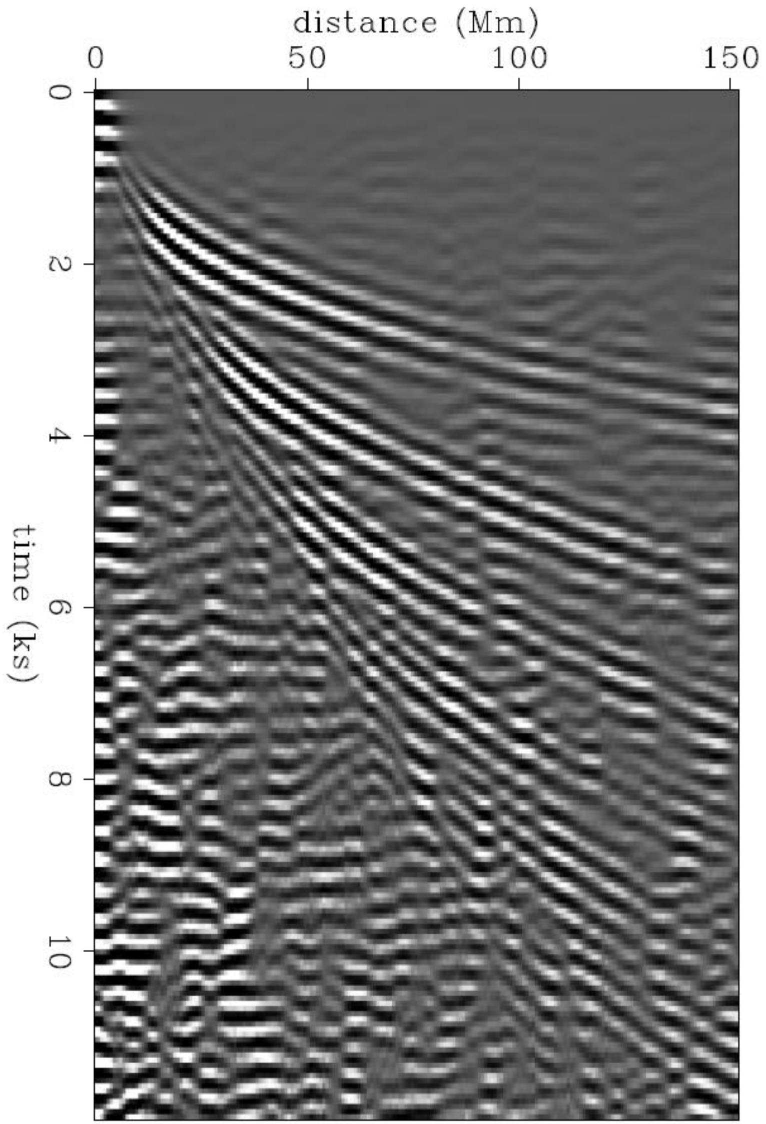
Helligkeitszeitreihen

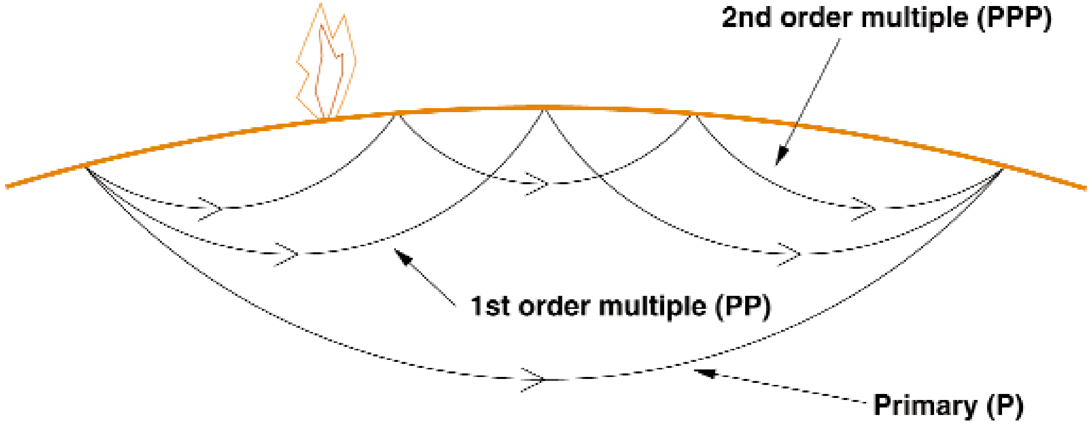


2-D + Zeit Helligkeitsdaten



Sonnenseismogramme aus Rausch-Korrelationen





Principle of noise correlations

Taking advantage of the correlation properties of diffuse fields towards the empirical reconstruction of seismograms without source

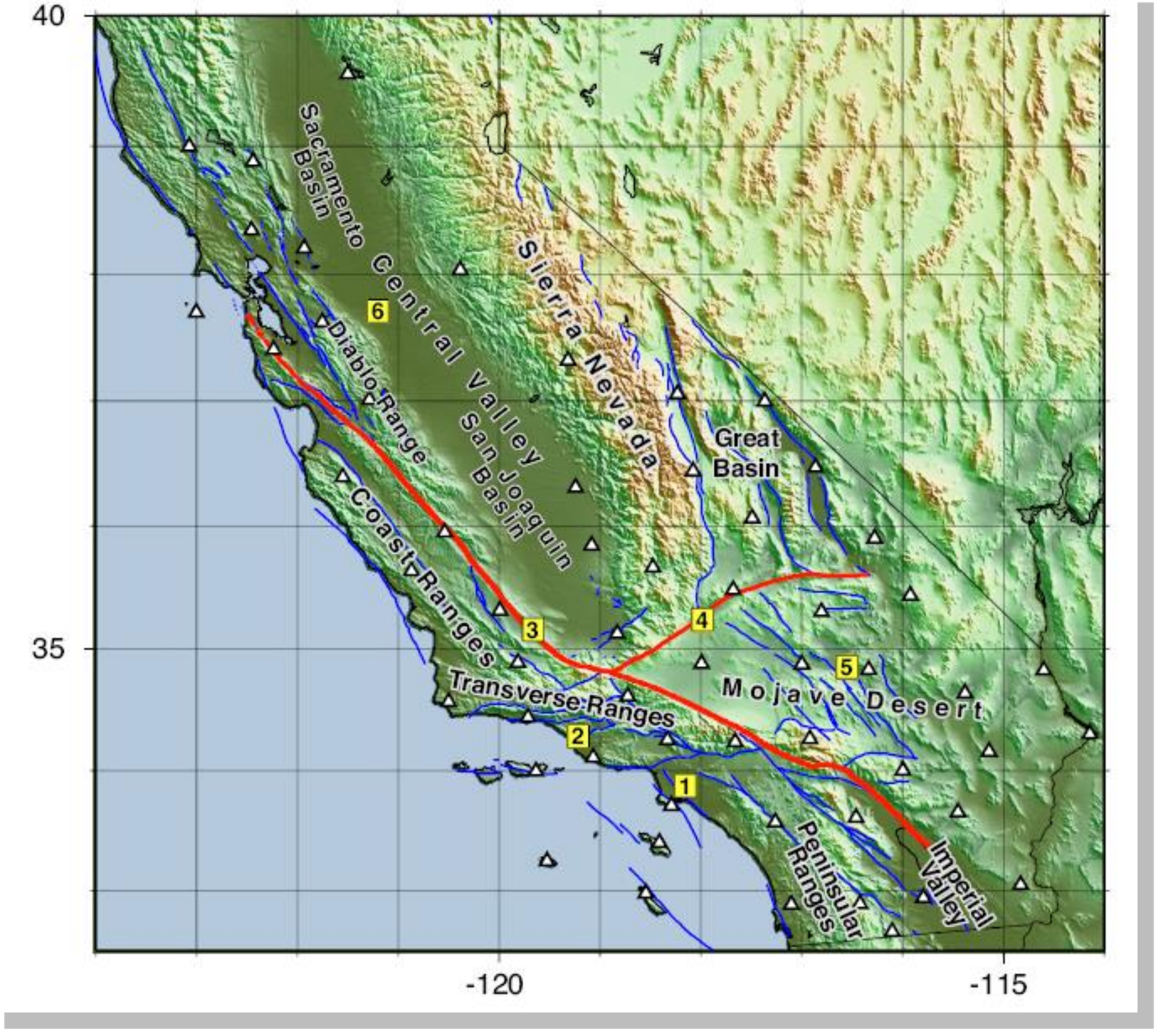
With this (real) passive experiment:

(t?,x?,y?,z? unidentified distant sources)

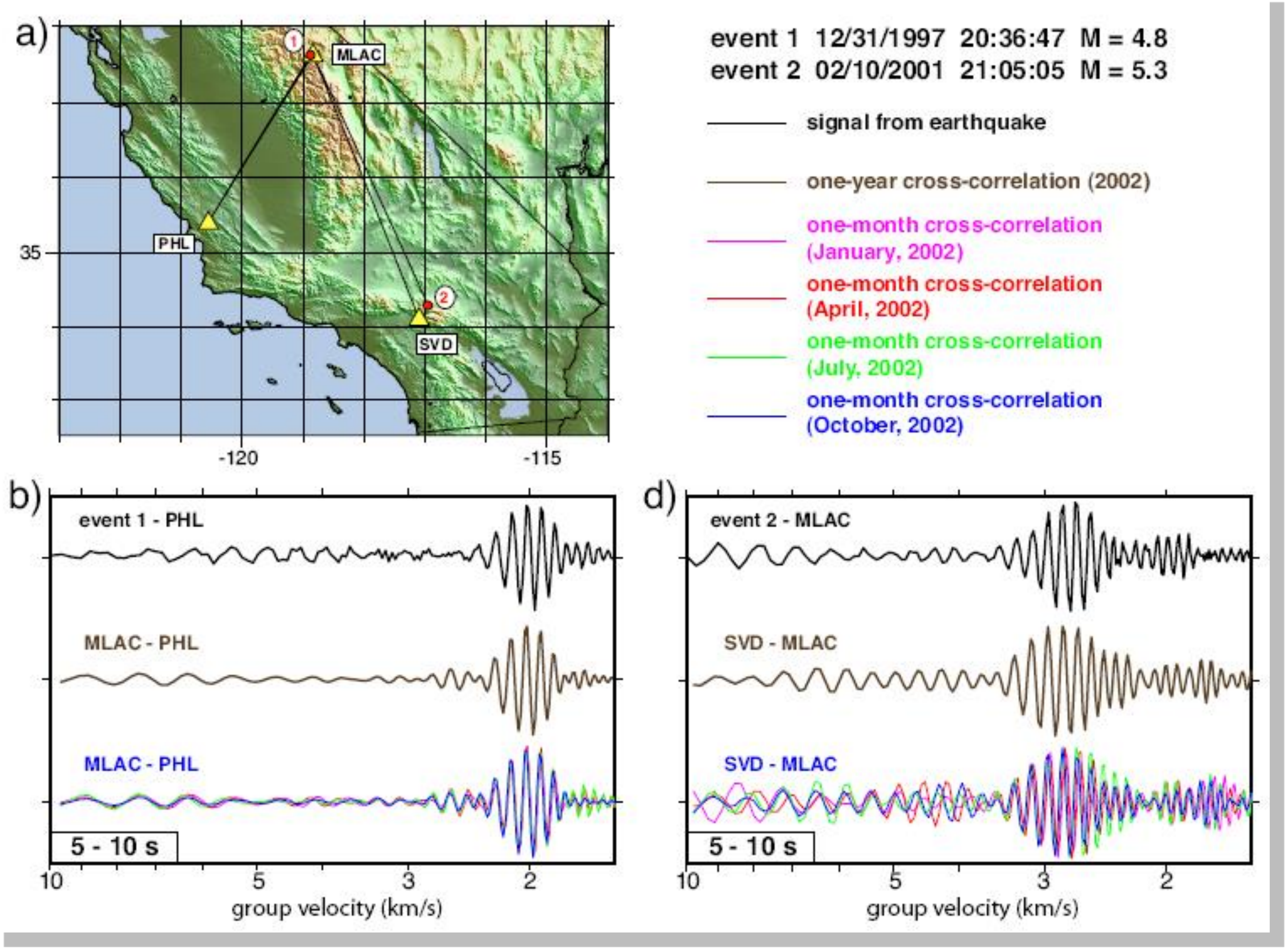
we want to find the result of that (ideal) active one

Limitations of the technique?

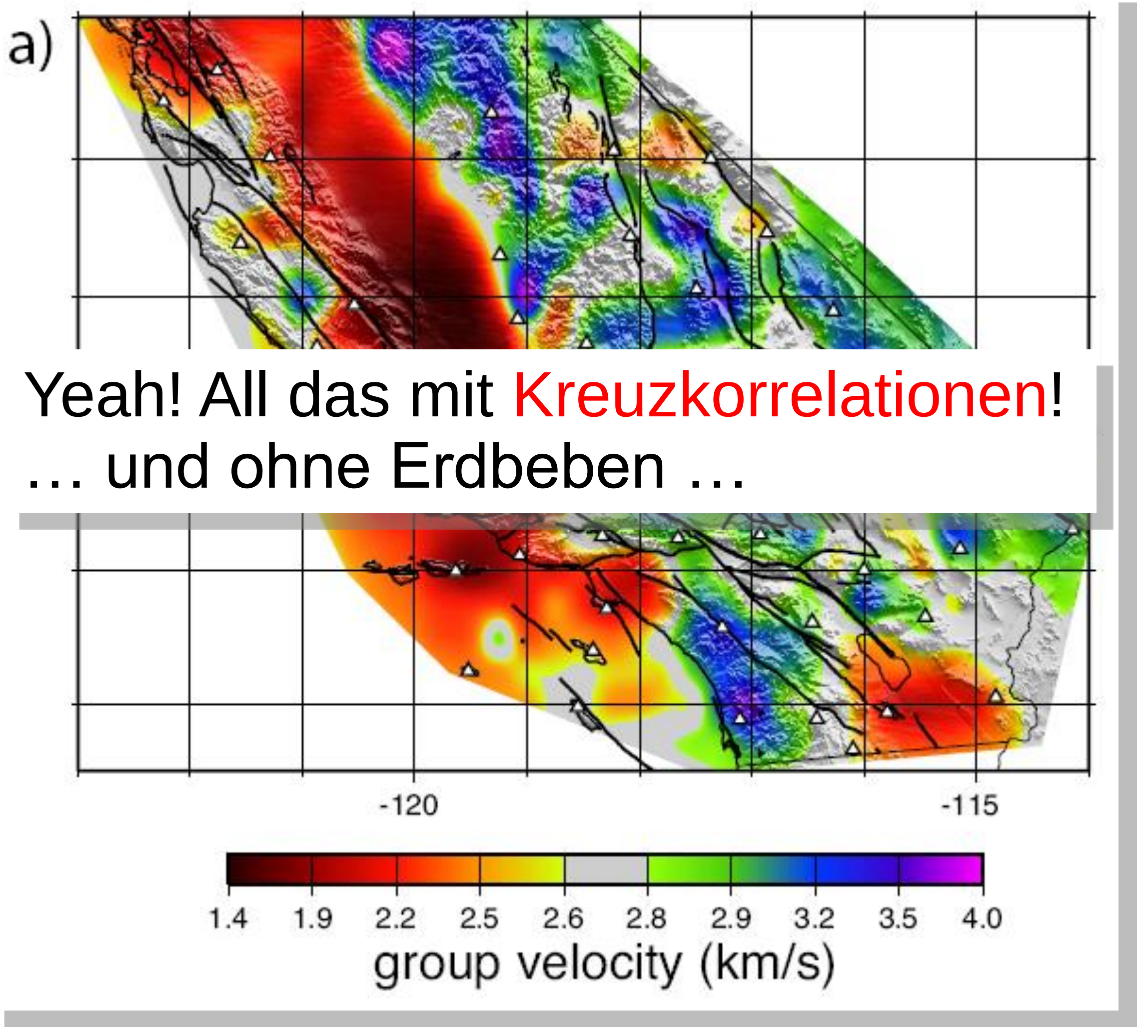
Tomografie mit Kreuzkorrelation



Green‘s Funktionen aus 1 Jahr „Rauschen“: Vergleich mit Erdbeben (Shapiro et al., Science, 2005)

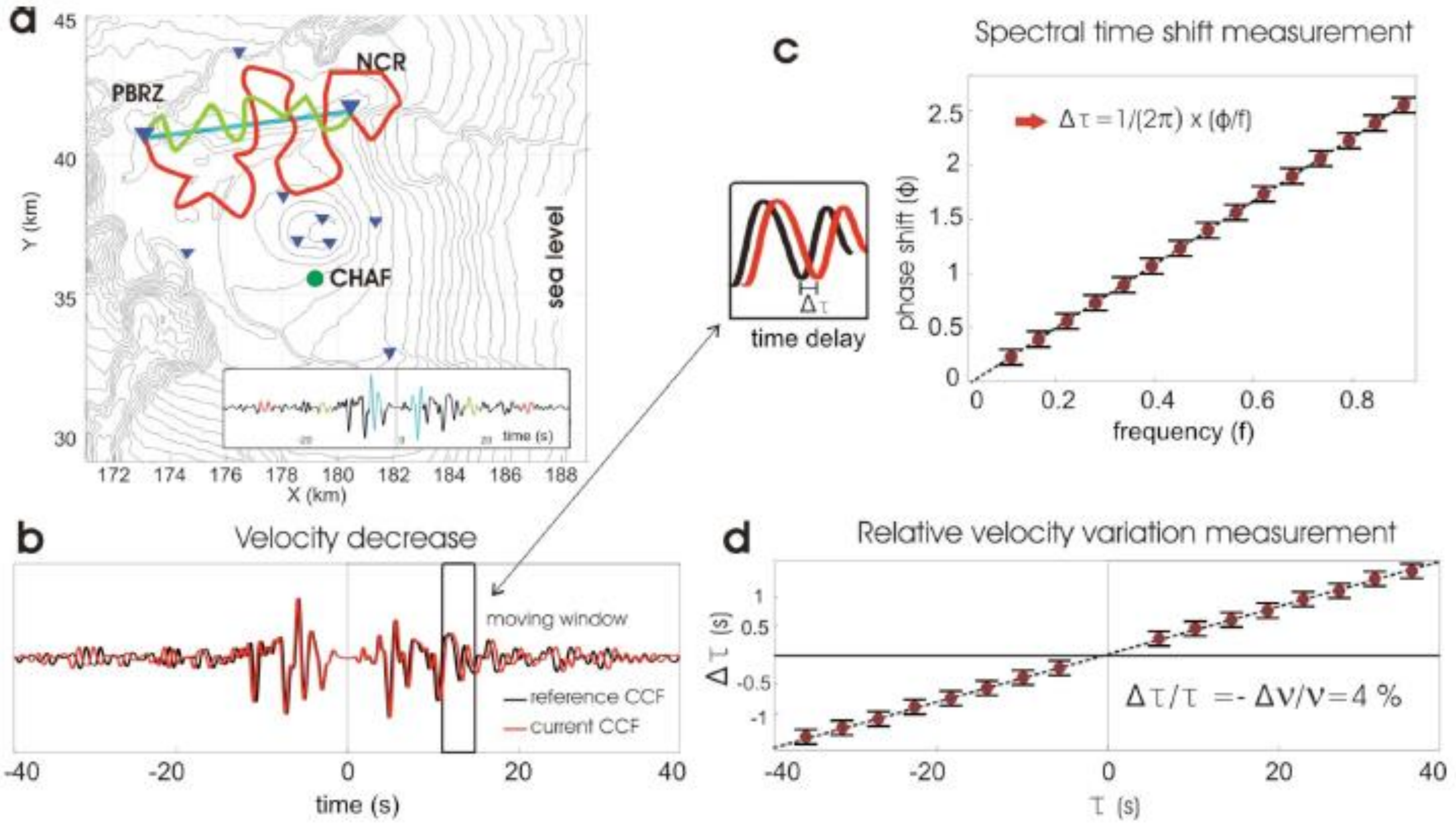


Tomografie von Kalifornien
7.5 s Rayleigh Wellen

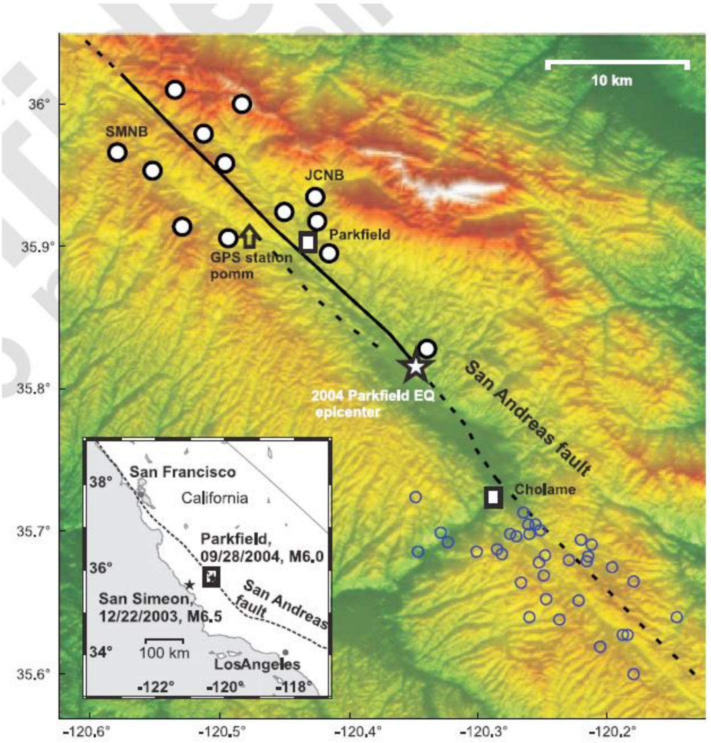


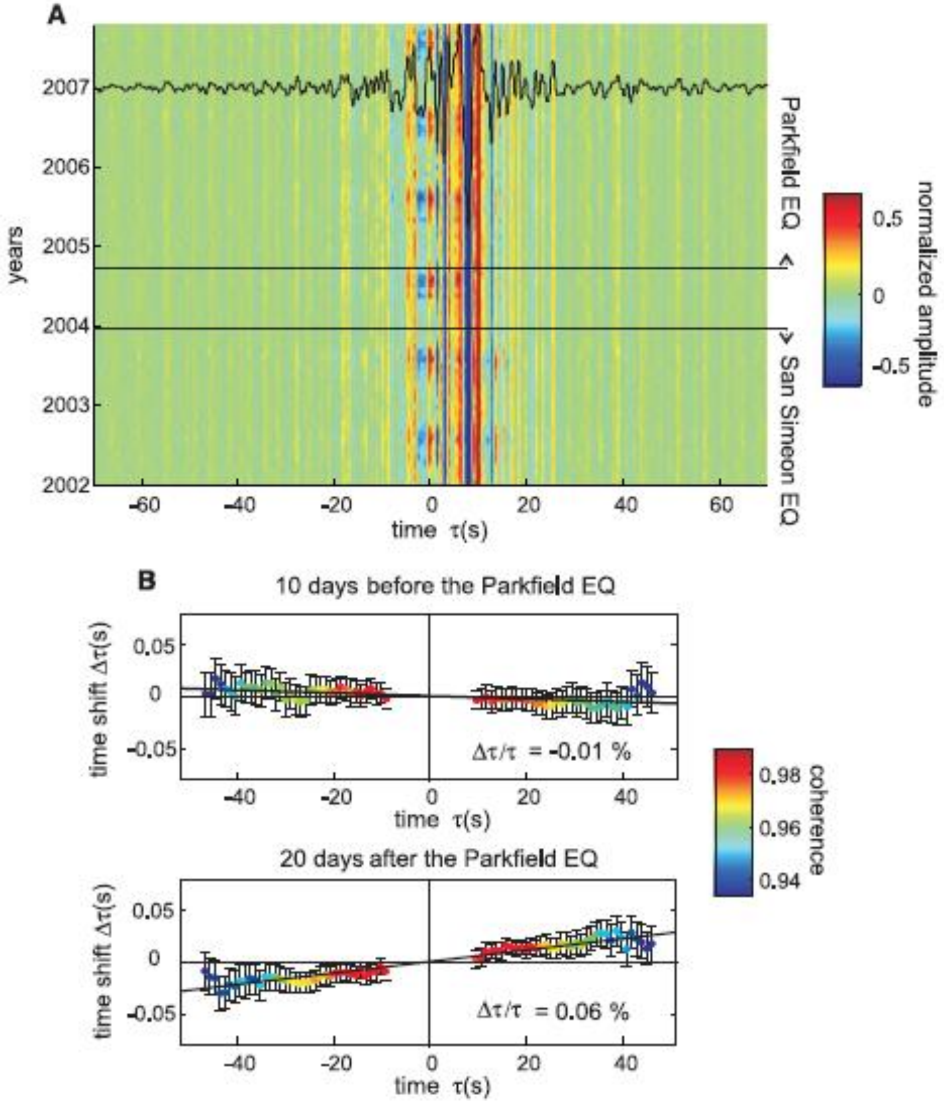
Yeah! All das mit Kreuzkorrelationen!
… und ohne Erdbeben …

Time dependent changes in seismic velocity

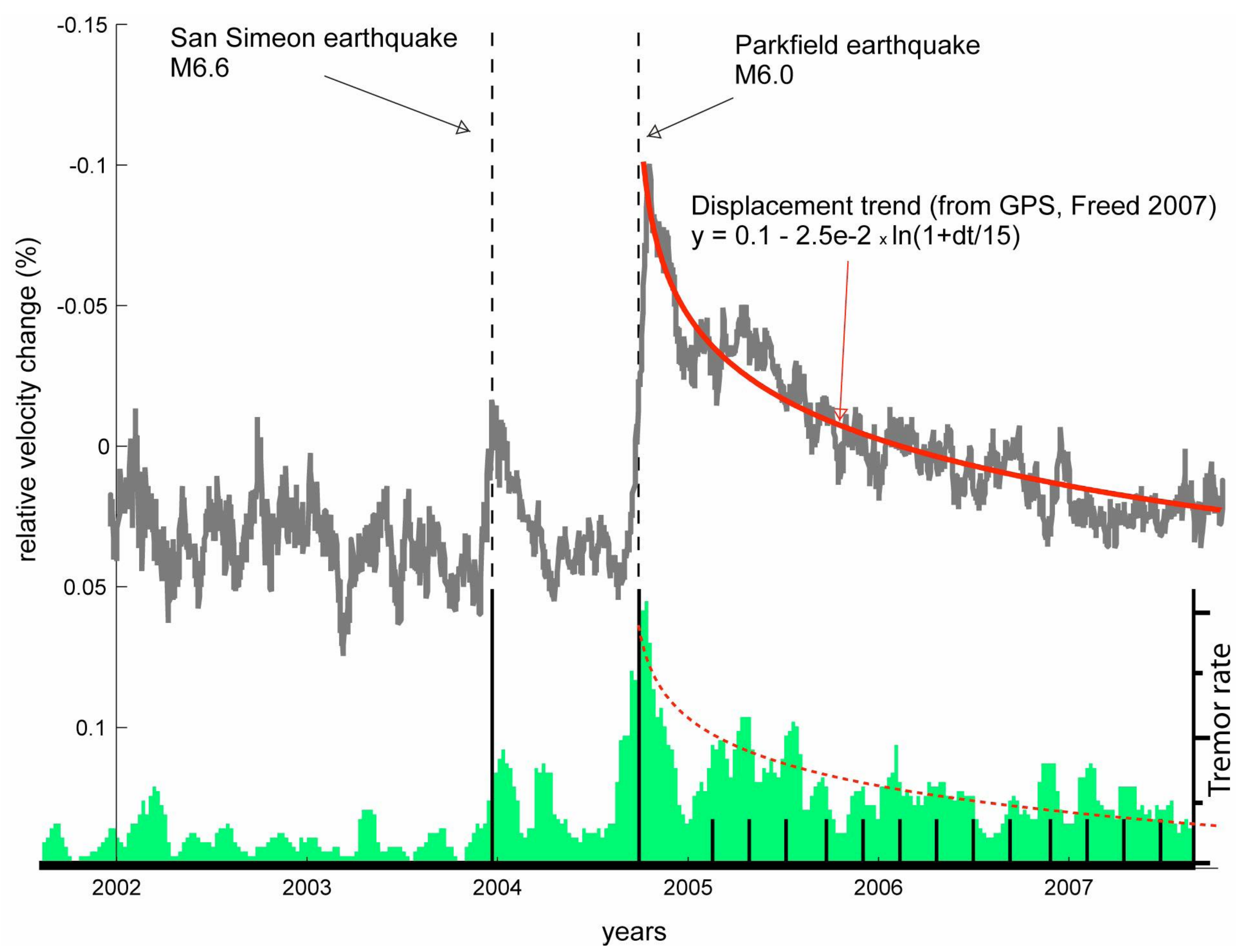


Time dependent changes in seismic velocity





Time-dependent changes



Chinese network

Western Sichuan Movable Seismic Array

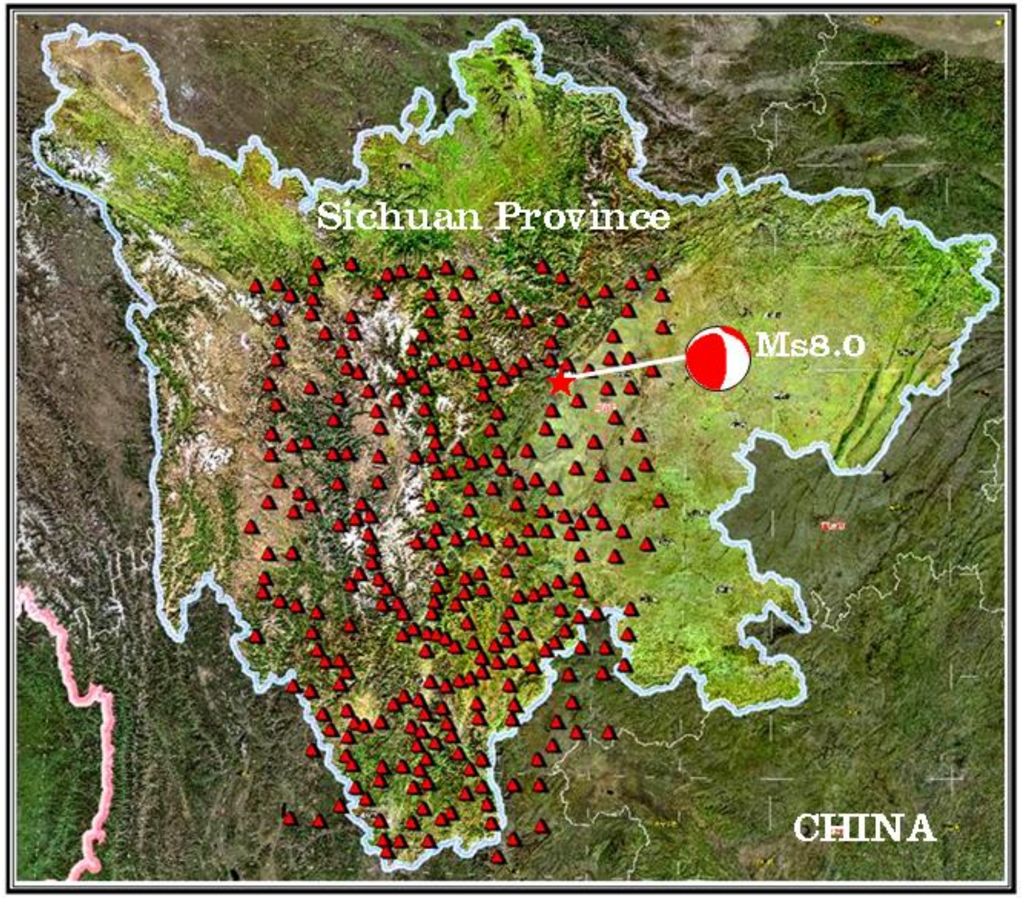
Data Recorder
REFTEK-130B

Seismometer
CMG-3ESPC

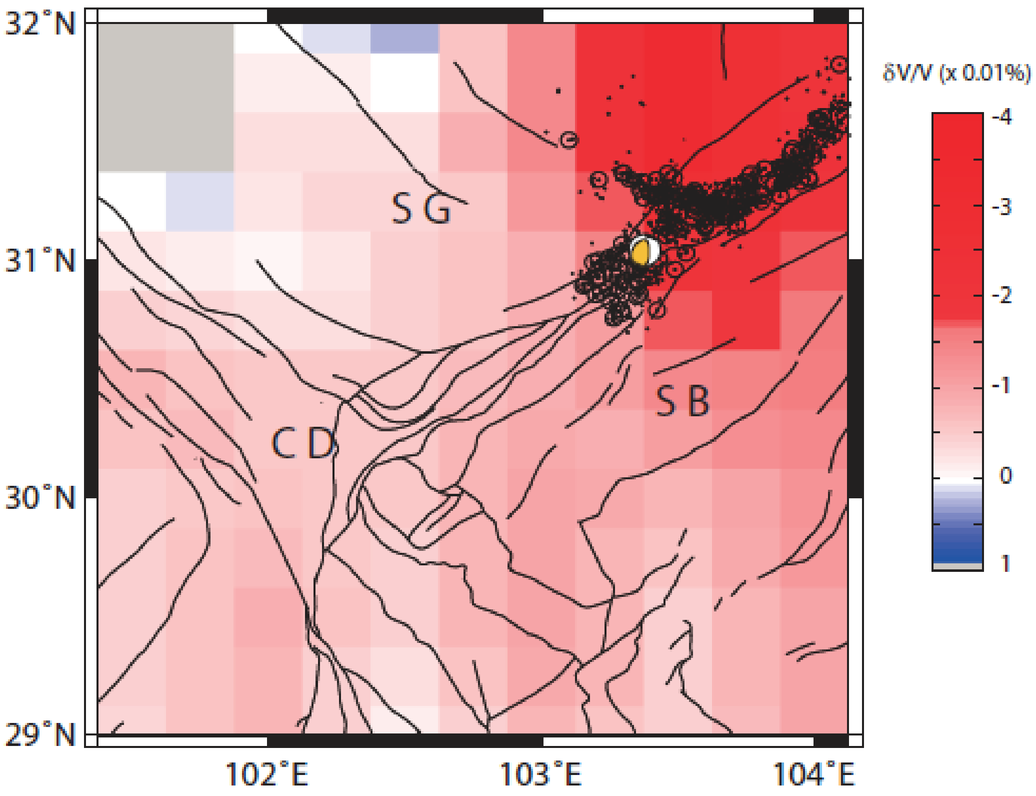
Solar Panel
Power Supply

297 stations

Operated since
October,2006



Changes due to earthquake



Velocity changes in 1-3s period band

Chen, Froment, Liu and Campillo 2010

Korrelation von (Ozean-erzeugtem) Rauschen

- Kreuzkorrelation von Seismogrammen der Stationen A und B über längere Zeiträume erlaubt eine Abschätzung der Green’schen Funktion zwischen A und B
- Die Green’sche Funktion enthält **alle** Information über die Eigenschaften des Systems (hier: die Erde), also kann man damit Tomographie Machen (ohne Erdbeben!!!)
- Nicht nur das: man kann minimale Änderungen der Erdeigenschaften über die Zeit feststellen (time-dependent seismology)
- Diese Analyse (seit ca. 2005) revolutioniert die Seismologie

Digitales Filtern

Oftmals beinhaltet ein aufgezeichnetes Signal eine Fülle von Informationen, an denen wir nicht interessiert sind (Rauschen, Störsignale). Um uns des Rauschens zu entledigen fügen wir einen Filter im Frequenzraum hinzu.

Die wichtigsten Filter sind:

- Hochpass: schneidet niedrige Frequenzen ab
- Tiefpass: schneidet hohe Frequenzen ab
- Bandpass: schneidet hohe und tiefe Frequenzen heraus, und hinterlässt ein Band von mittleren Frequenzen
- Bandfilter: schneidet bestimmte Frequenzen heraus und hinterlässt alle anderen Frequenzen

Cutoff Frequency (Eckfrequenz)

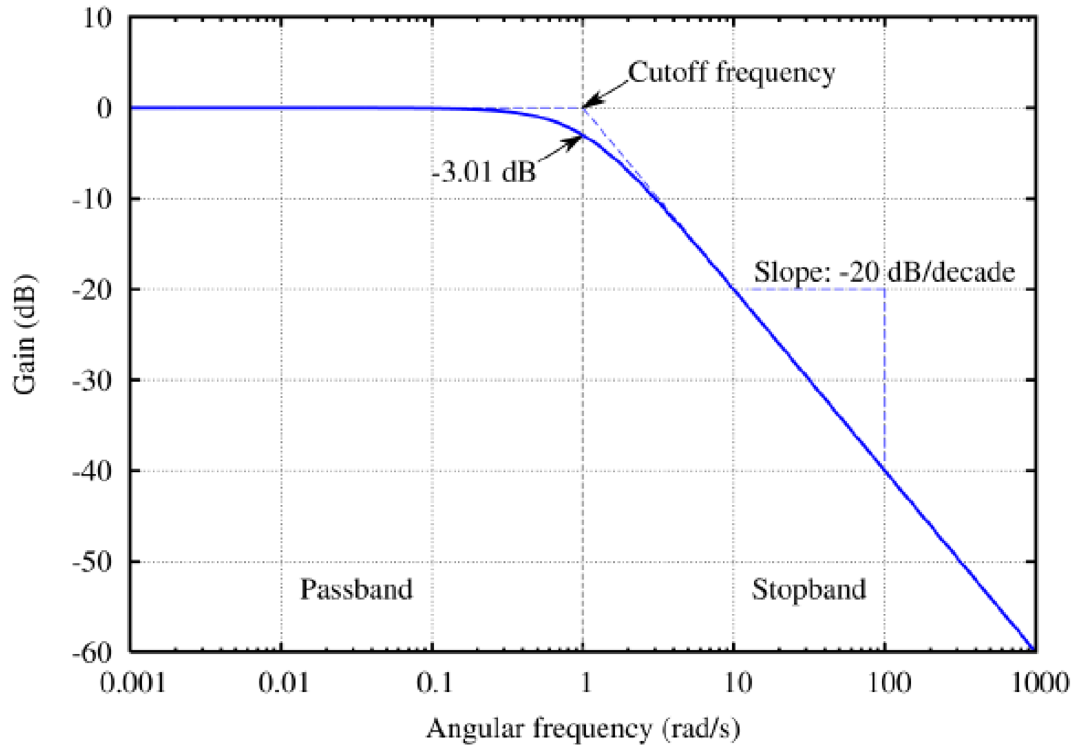
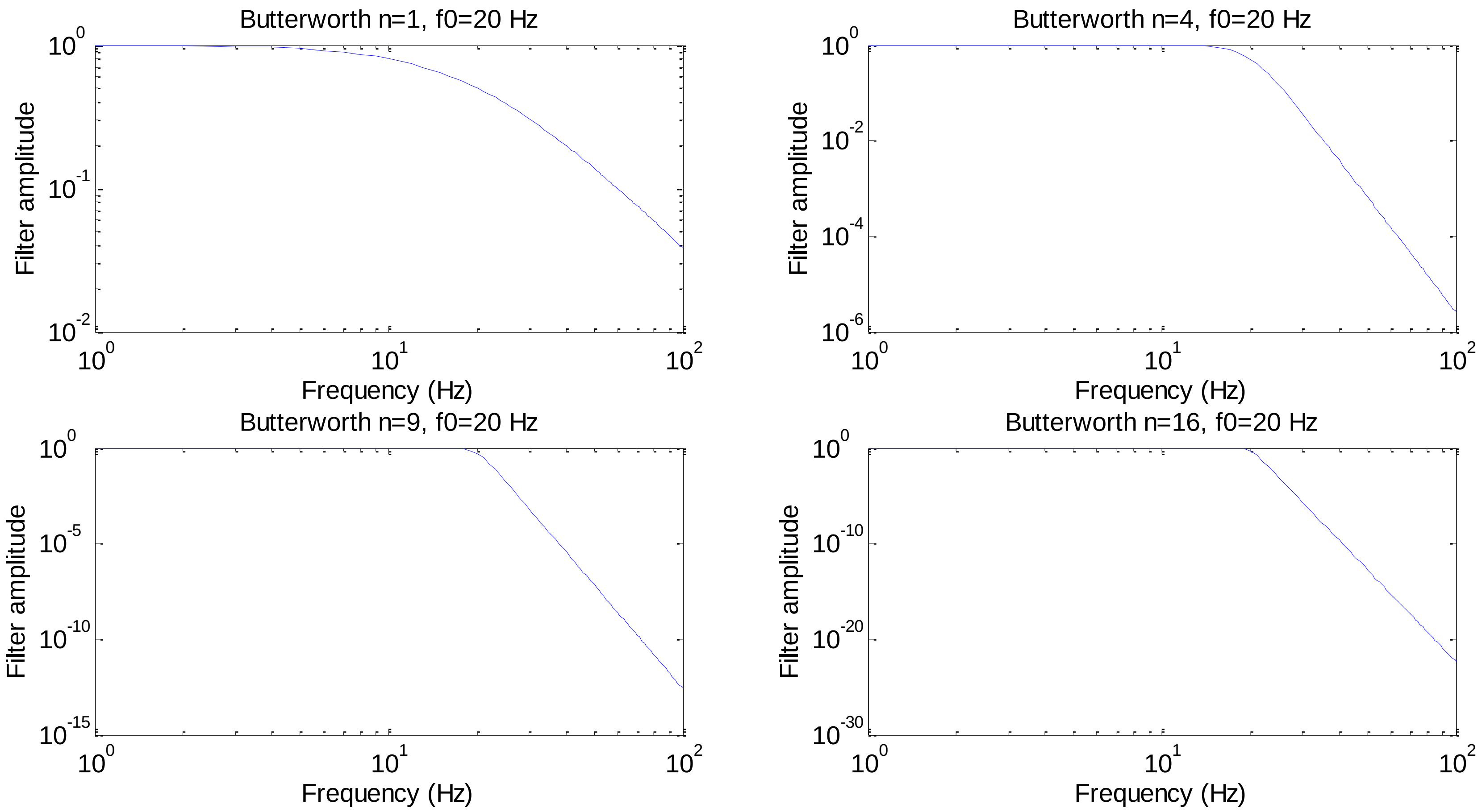


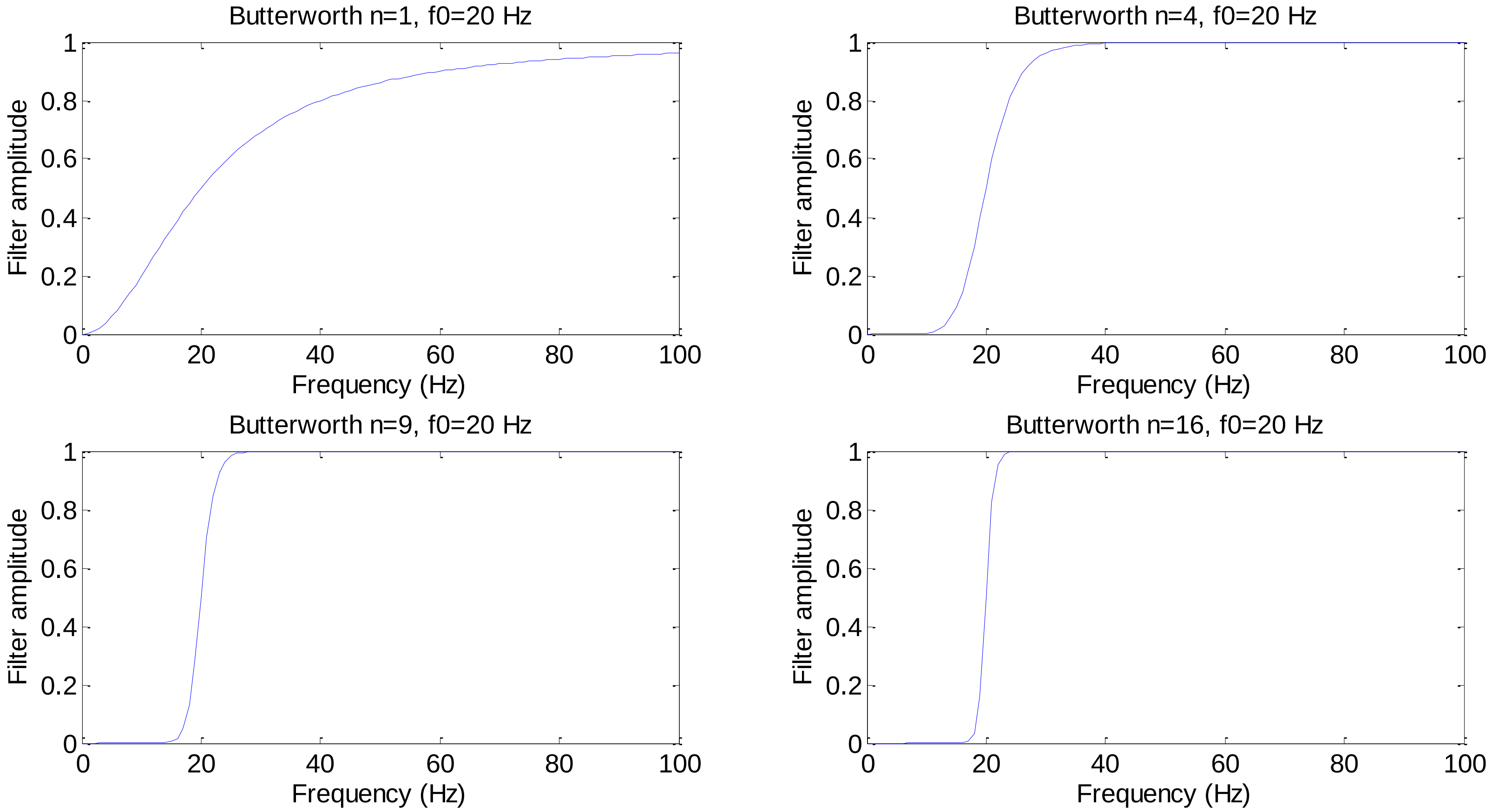
Figure 5.2: Amplitude response of a highpass Butterworth filter, showing the passband, stopband and the cutoff frequency. (The slope $-20dB$ per decade is the same as $-6dB$ per octave, equivalent to a slope of $-s^1$ [as one order of magnitude in amplitude is equal to $20db$].)

Typischer Tiefpassfilter (Butterworth)

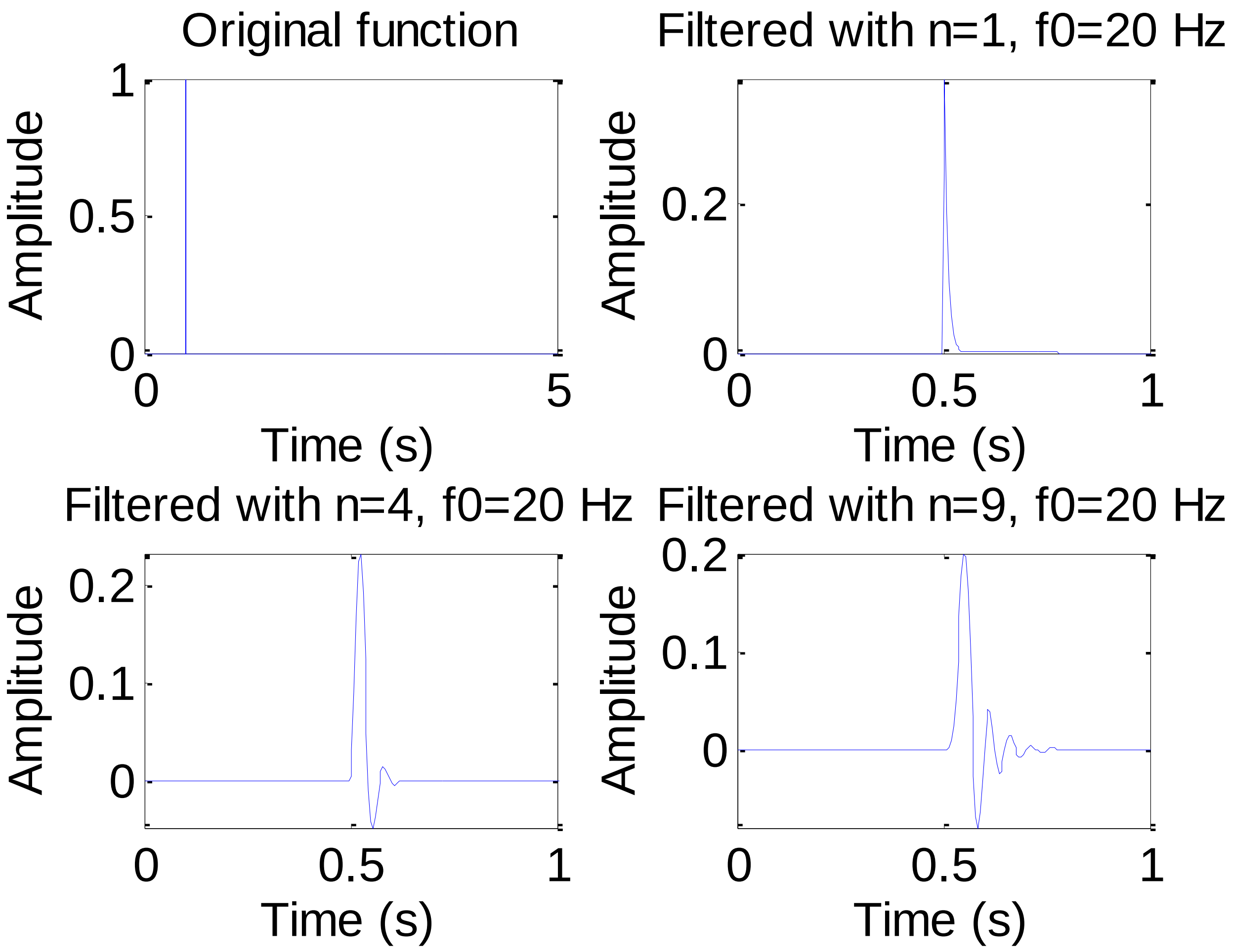


Die Krümmung der Filterfunktion (-> Ordnung des Butterworth Filters) an der Eckfrequenz beeinflusst den Effekt auf die Zeitreihe maßgeblich!

Typischer Hochpassfilter (Butterworth)

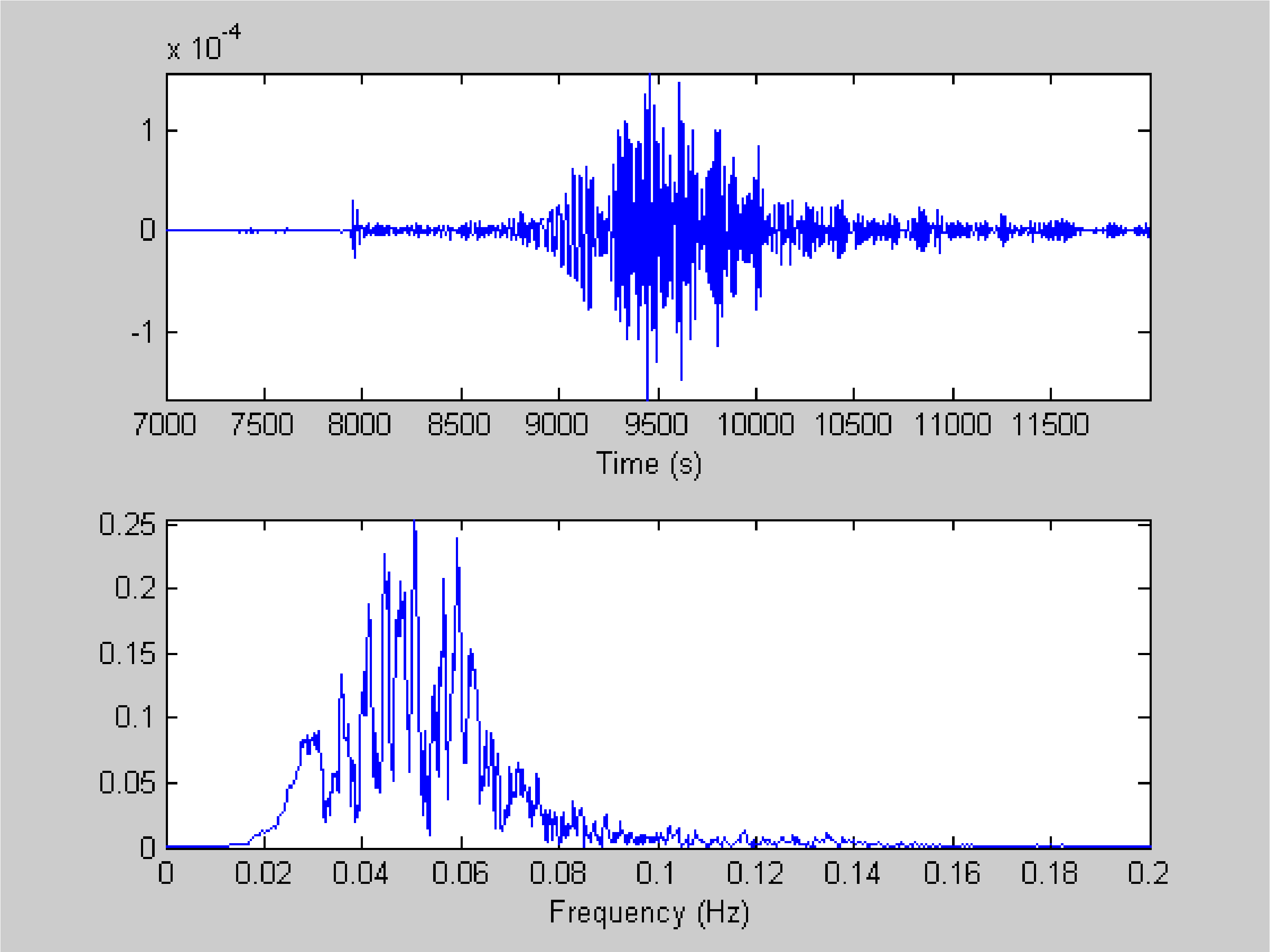


Beispiel: kausaler Filter (Tiefpass 20Hz)

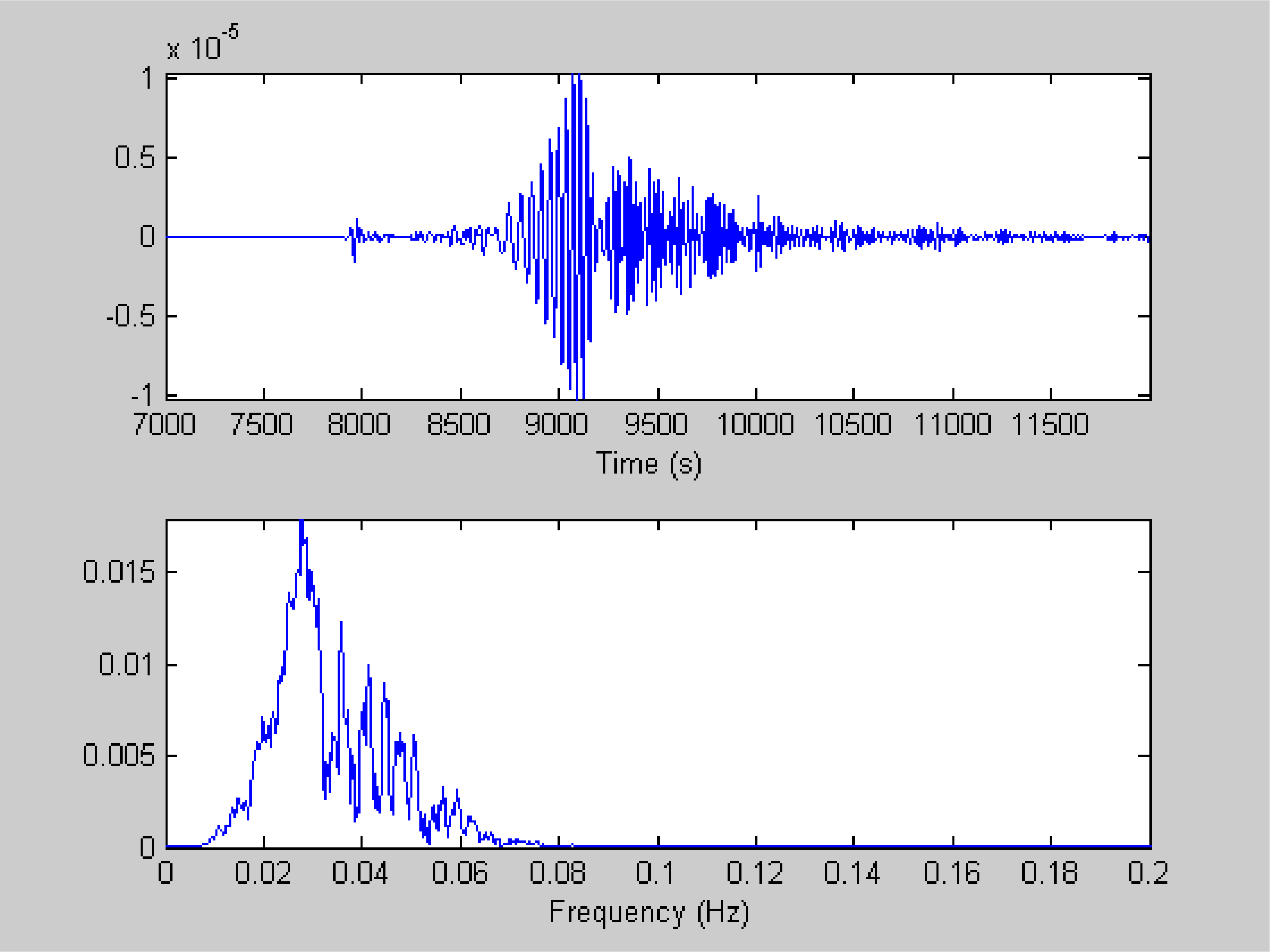


Warum kausal? Z.B. seismische Laufzeiten („Ersteinsätze“) bleiben erhalten.

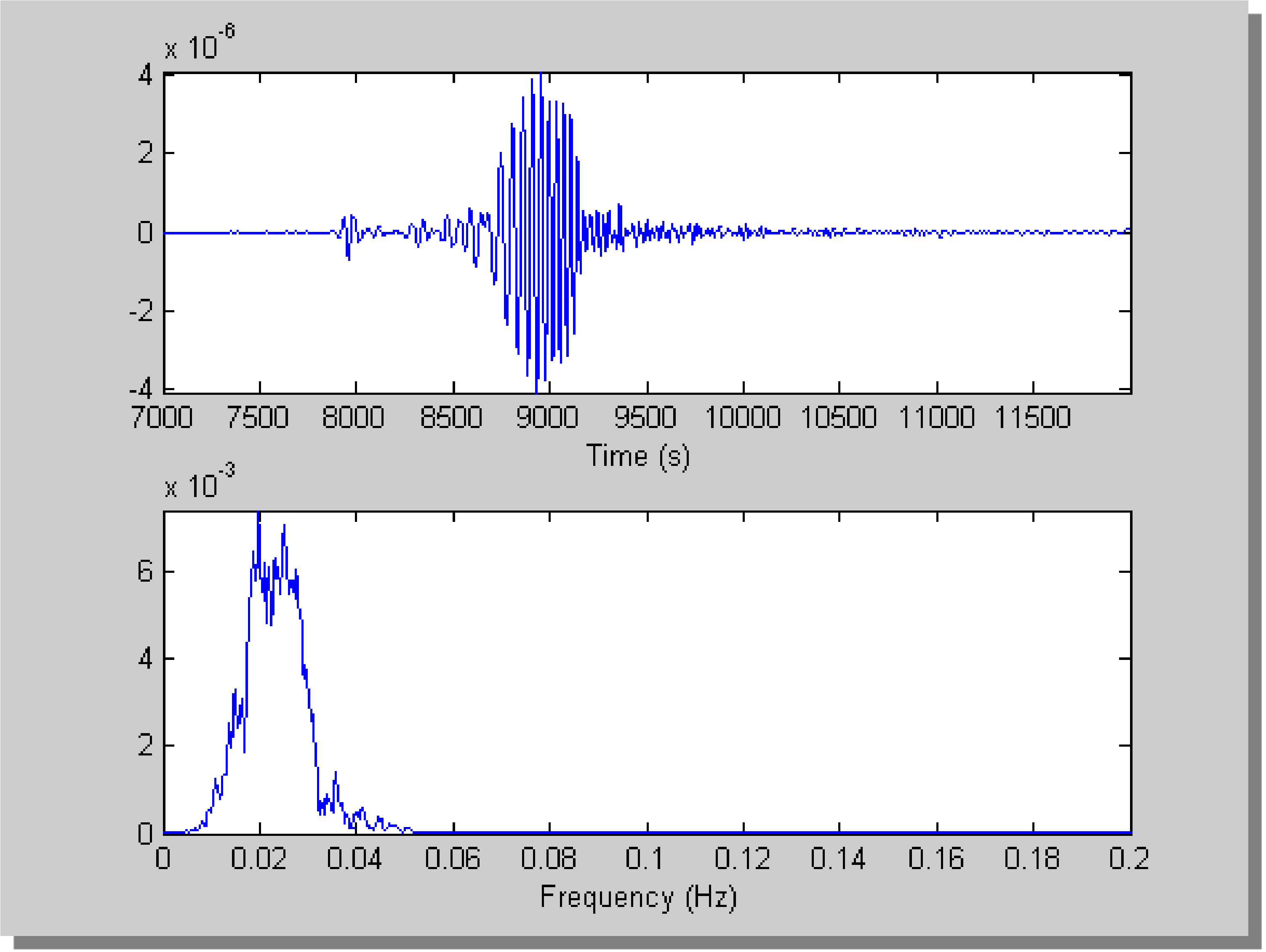
Digitales Filtern – Originales Seismogramm



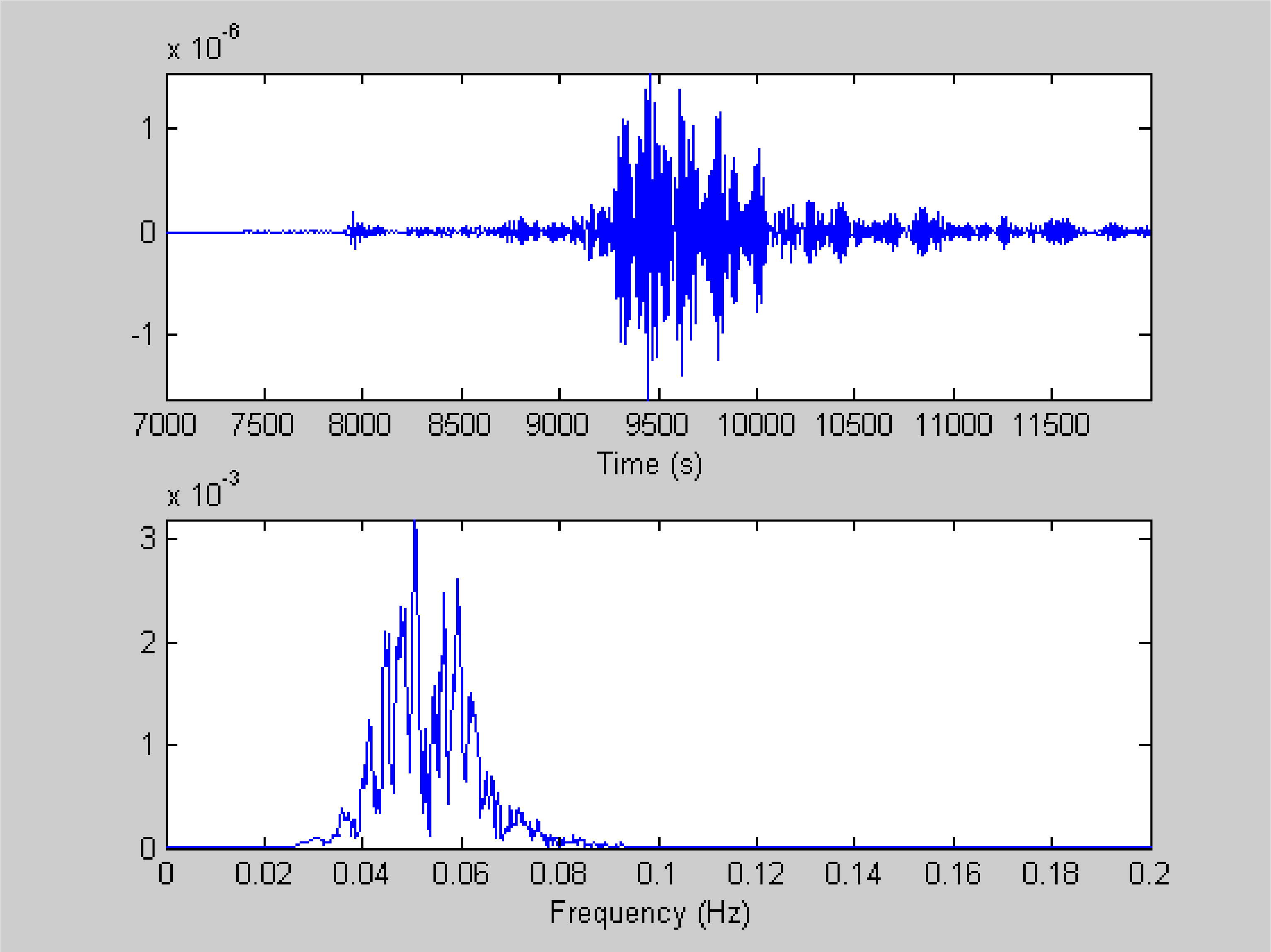
Tiefpass Filterung



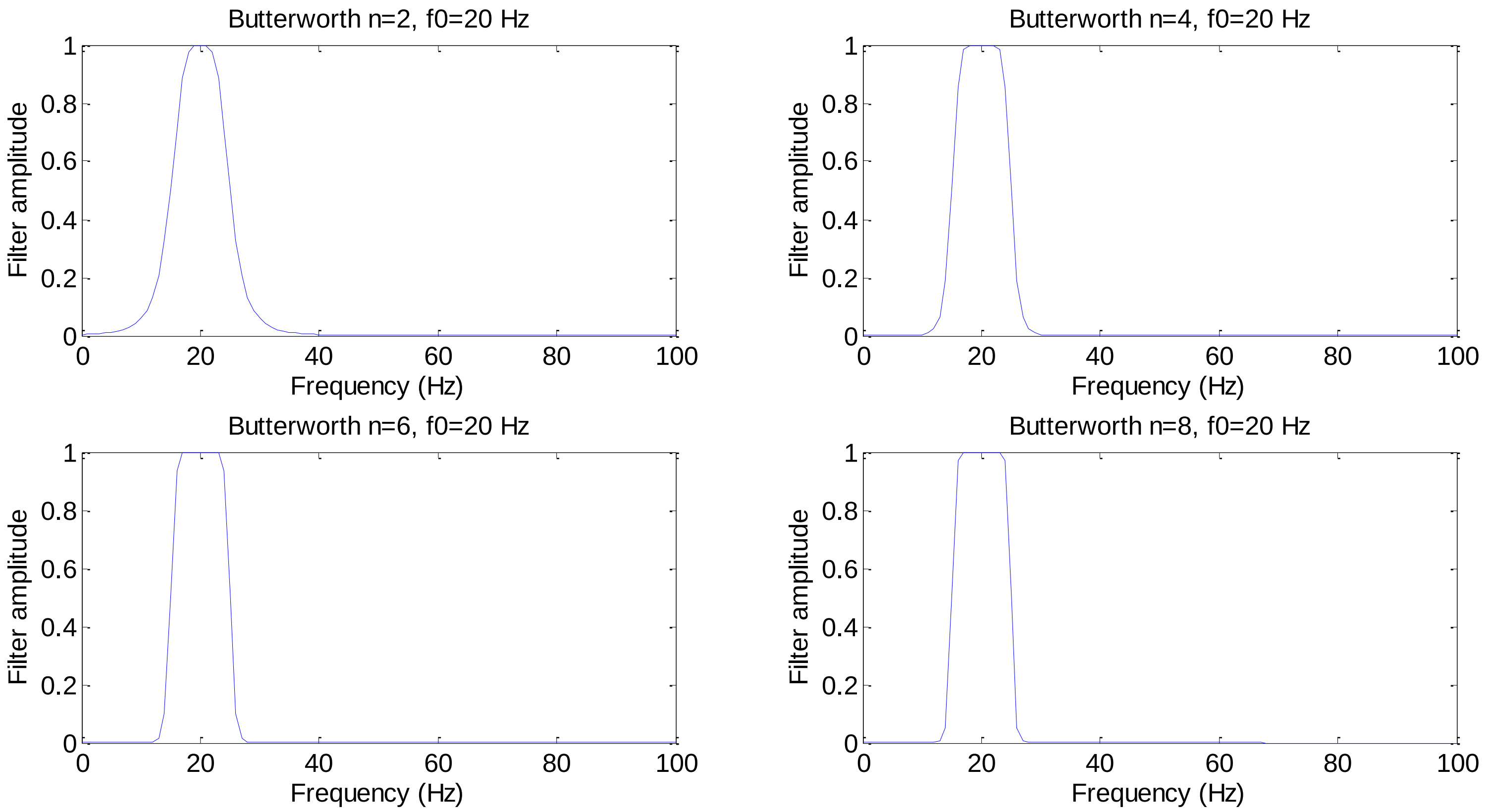
Tiefpass Filterung



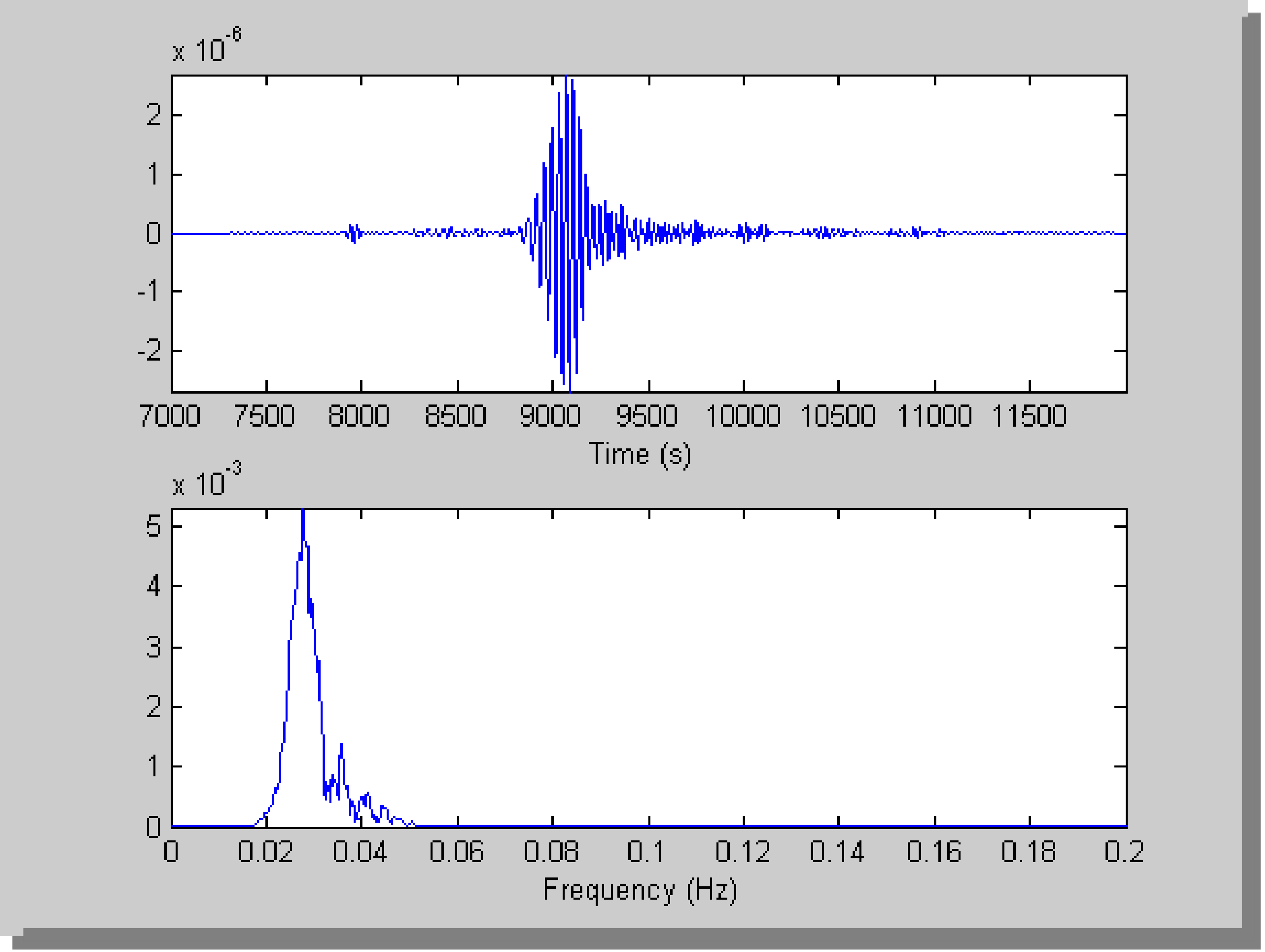
Hochpass Filter



Bandpass (Butterworth)

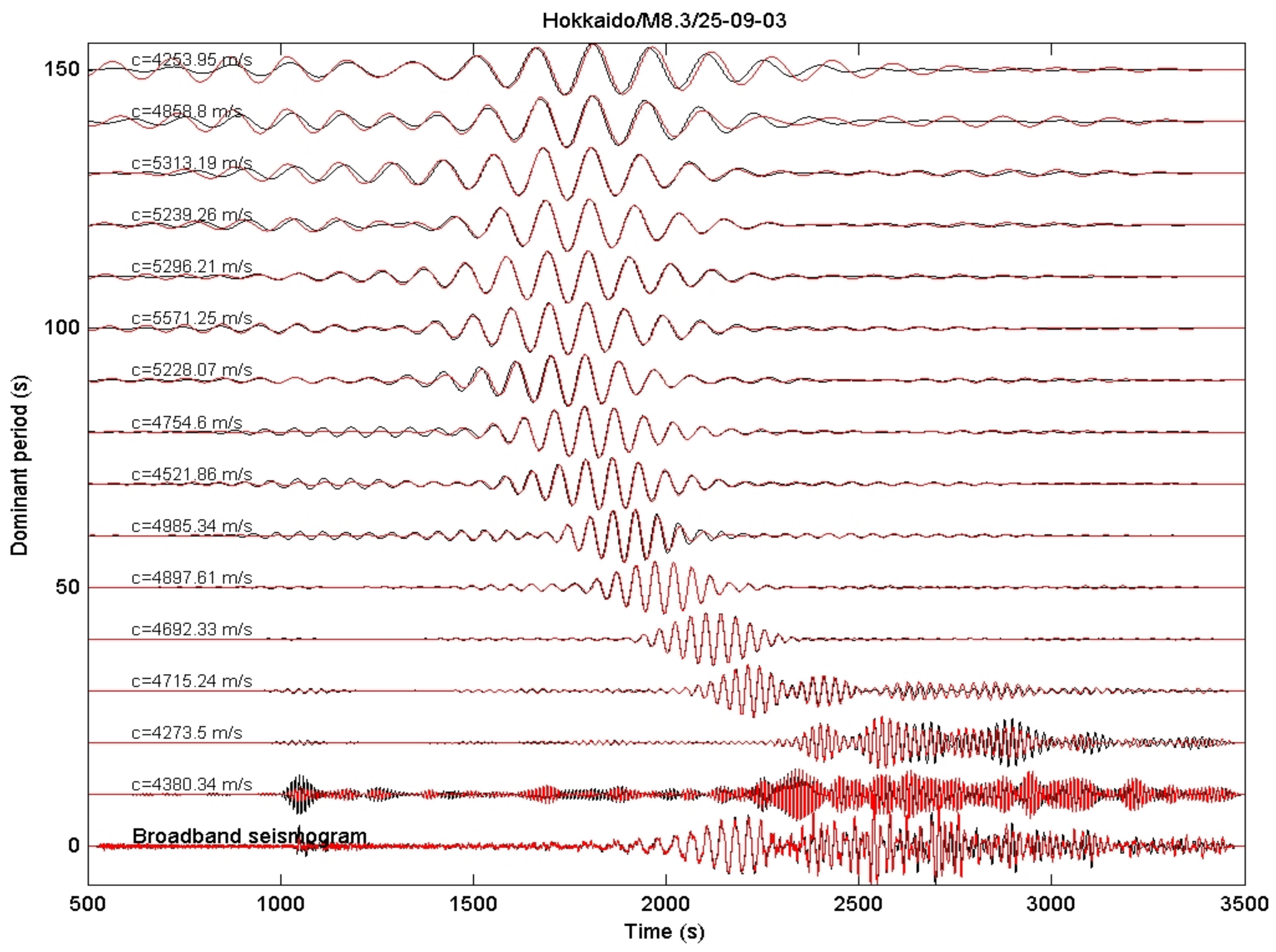


Bandpass Filter



Bandpass Filter

Eckfrequenz wird kleiner, Anteil hoher Frequenzen nimmt ab



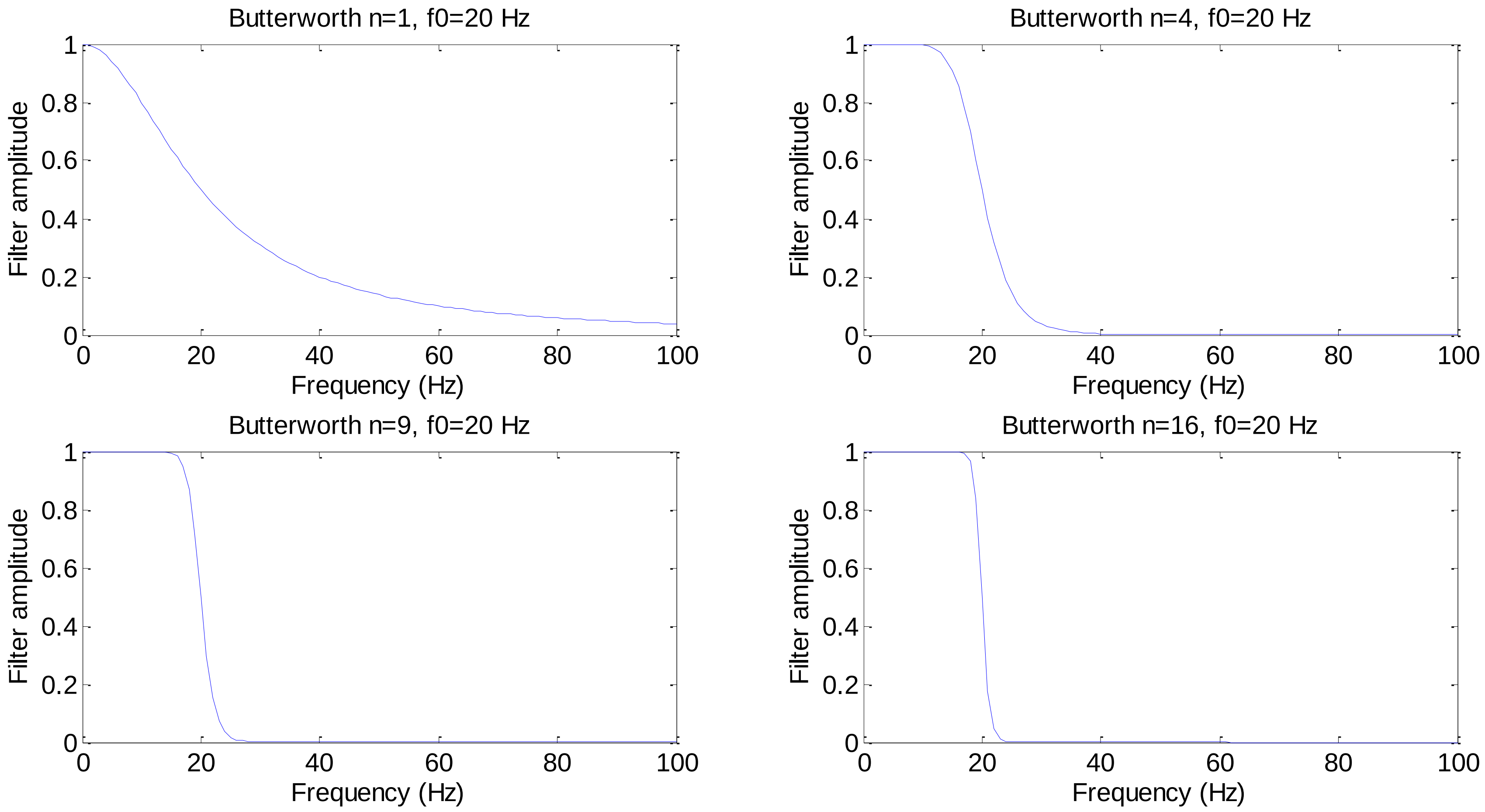
Zero phase and causal filters - Examples

Zero phase filters can be realised by

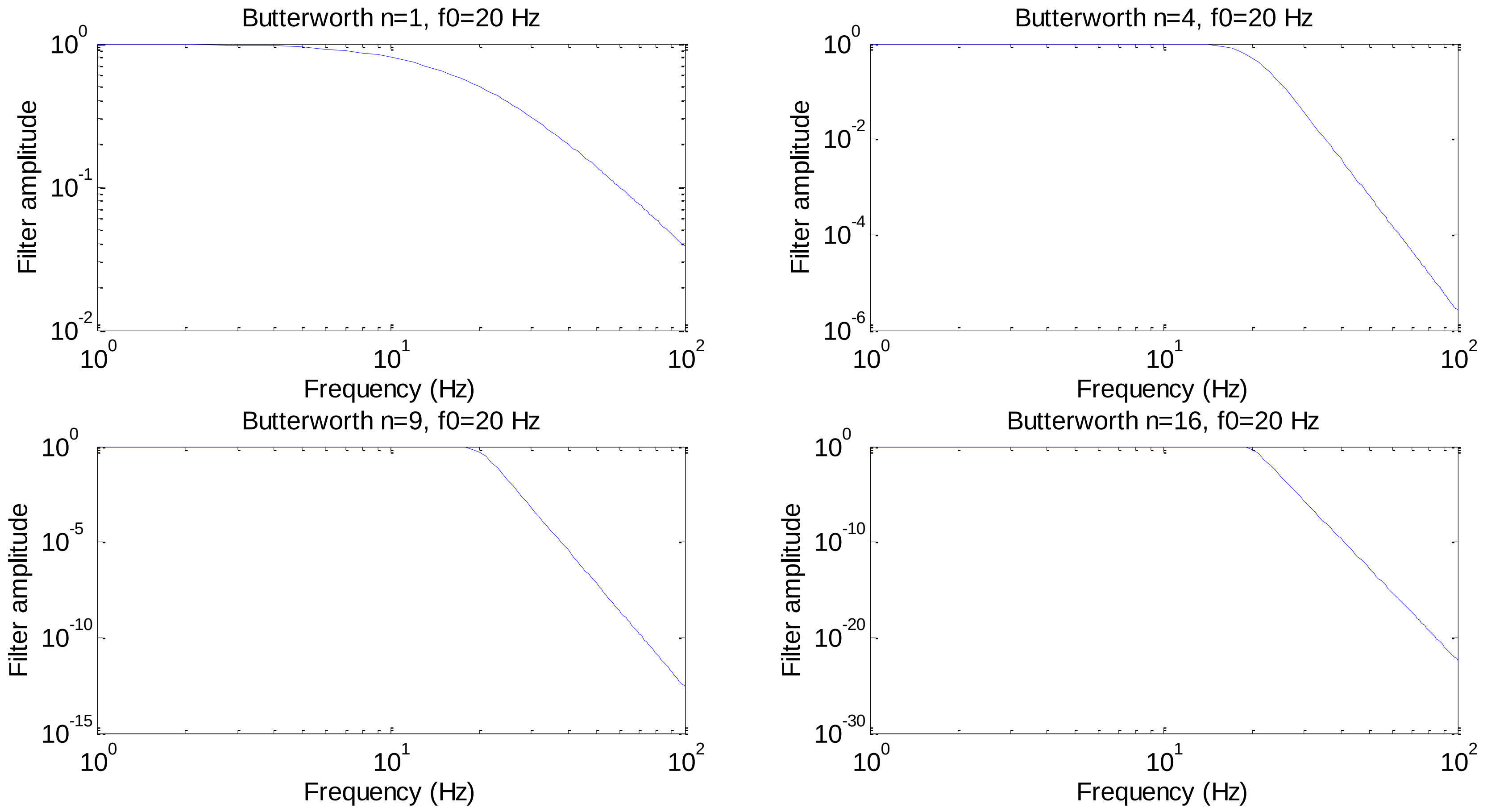
- Convolve first with a chosen filter
- Time reverse the original filter and convolve again
- First operation multiplies by $F(\omega)$, the 2nd operation is a multiplication by $F^*(\omega)$
- The net multiplication is thus $|F(w)|^2$
- These are also called two-pass filters

The Butterworth Filter (Low-pass, 0-phase)

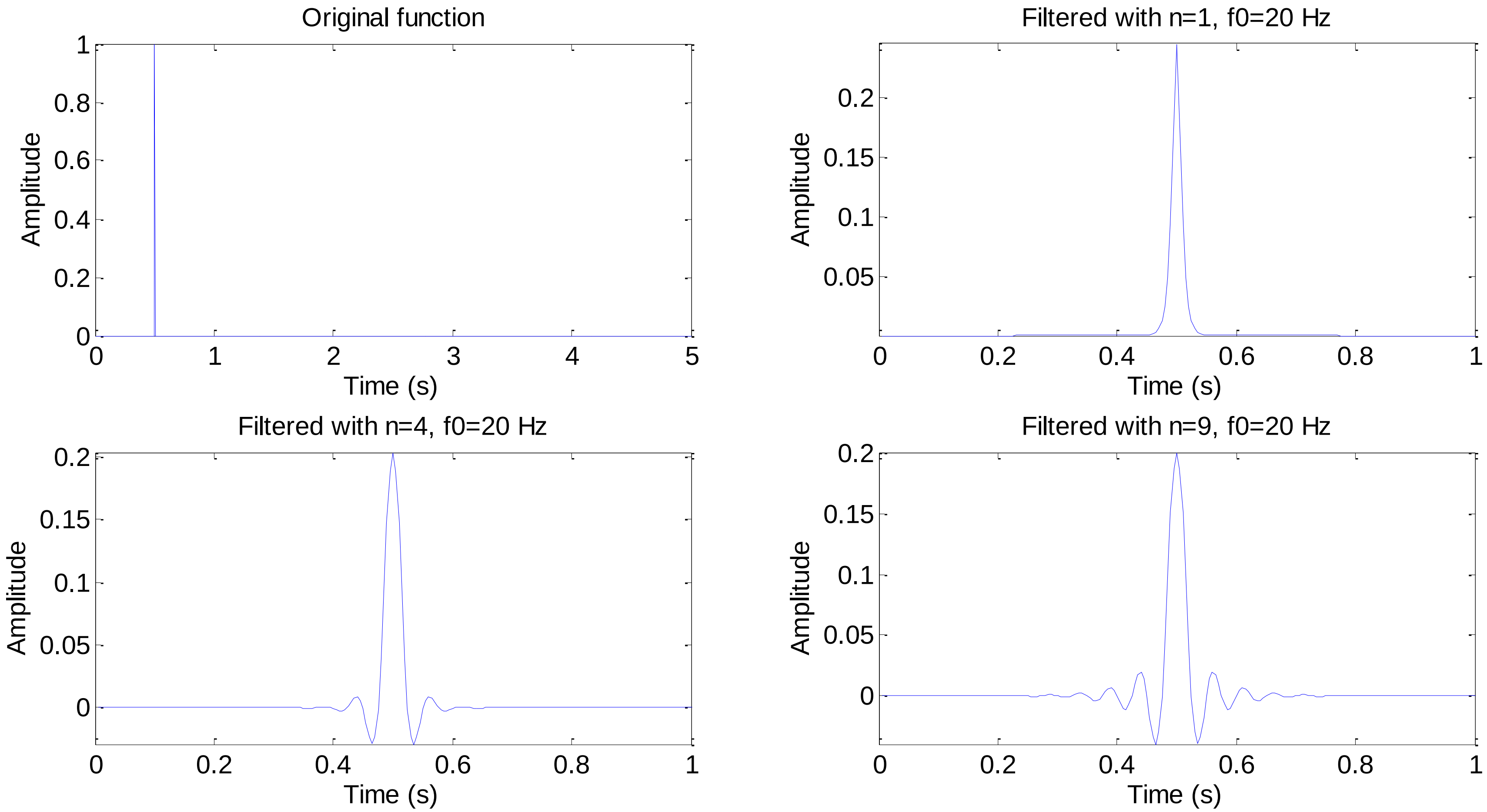
$$\left|F_L(\omega)\right| = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}$$



In log-log scale …

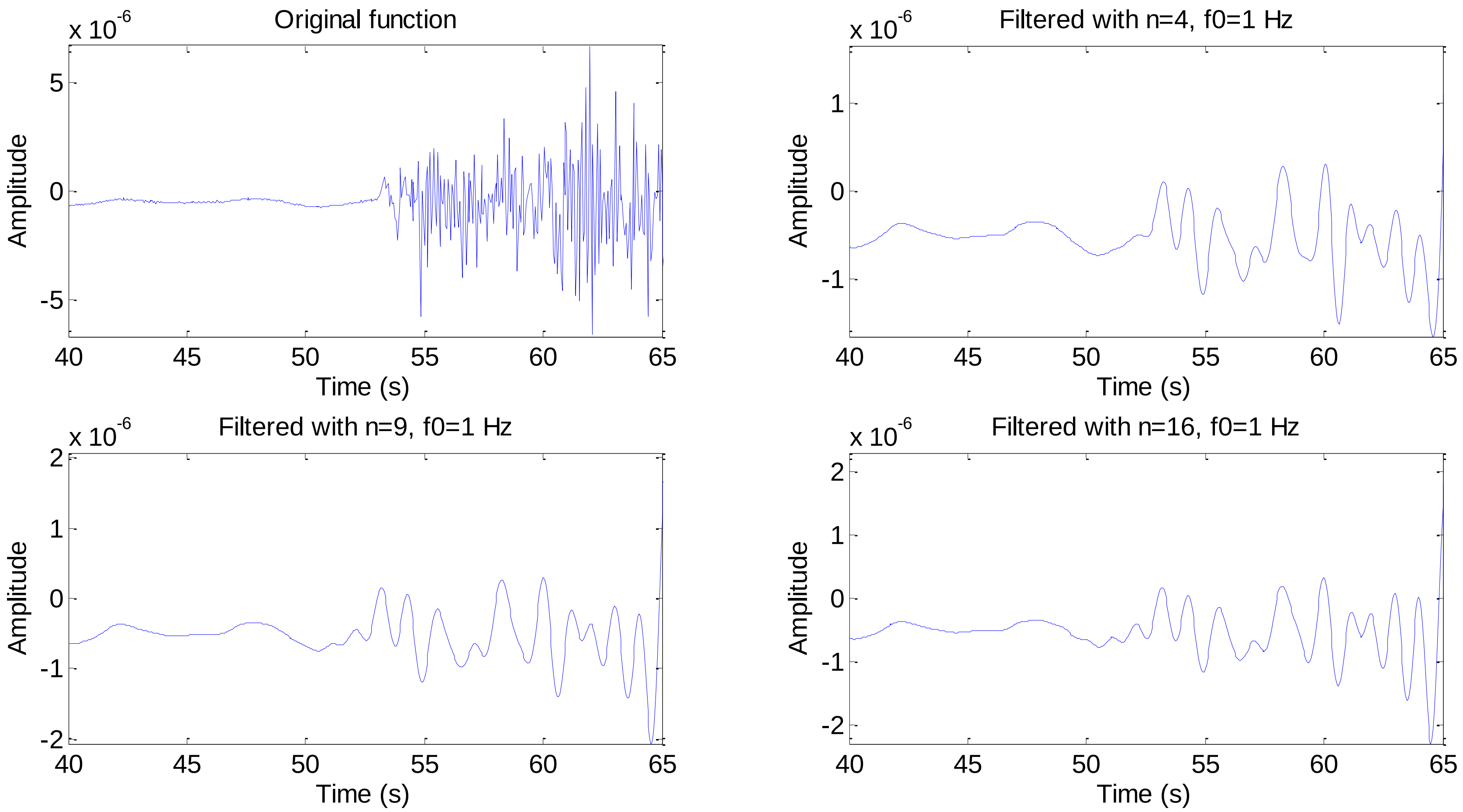


… effect on a spike …



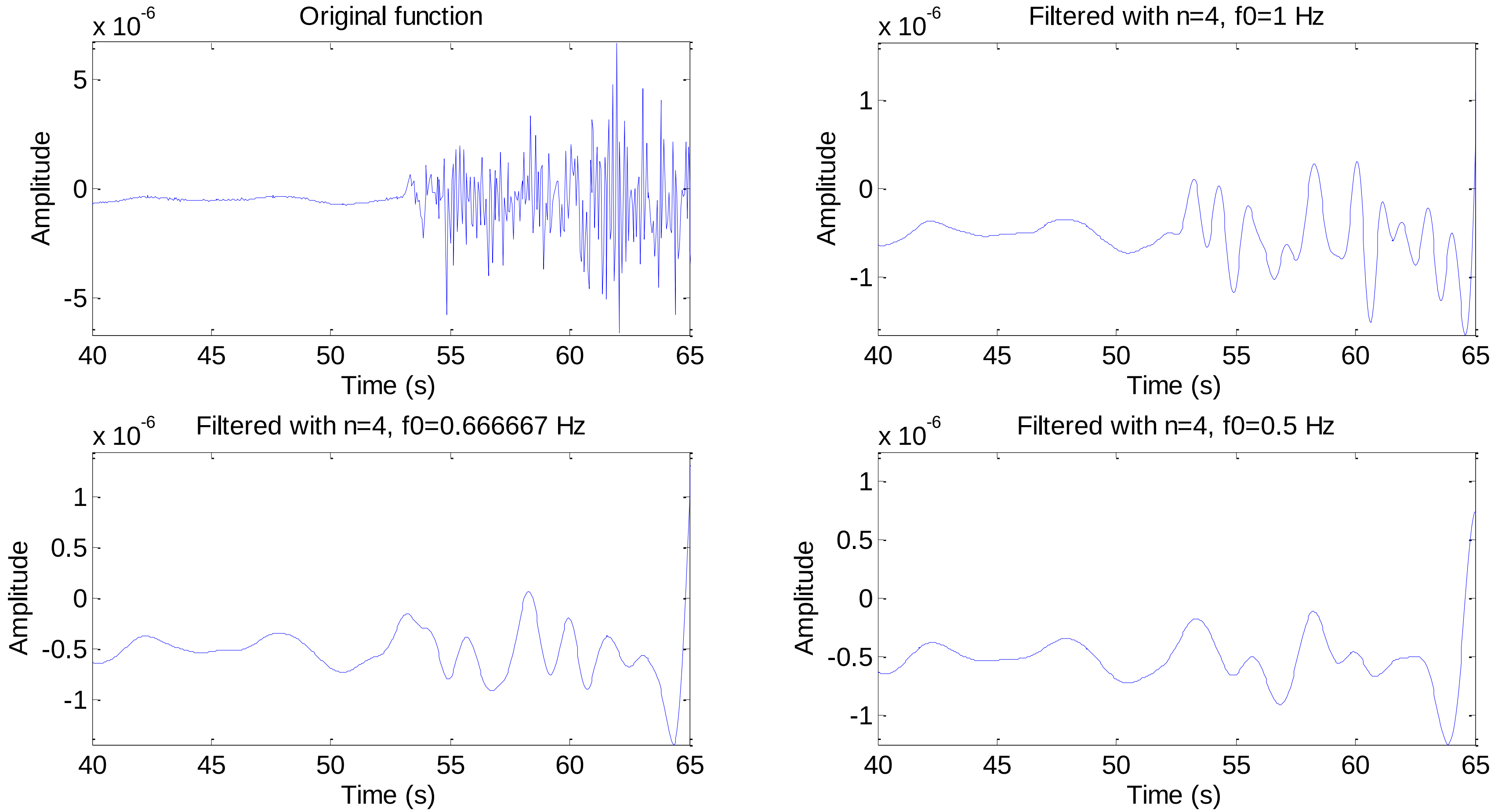
… on a seismogram …

… varying the order …



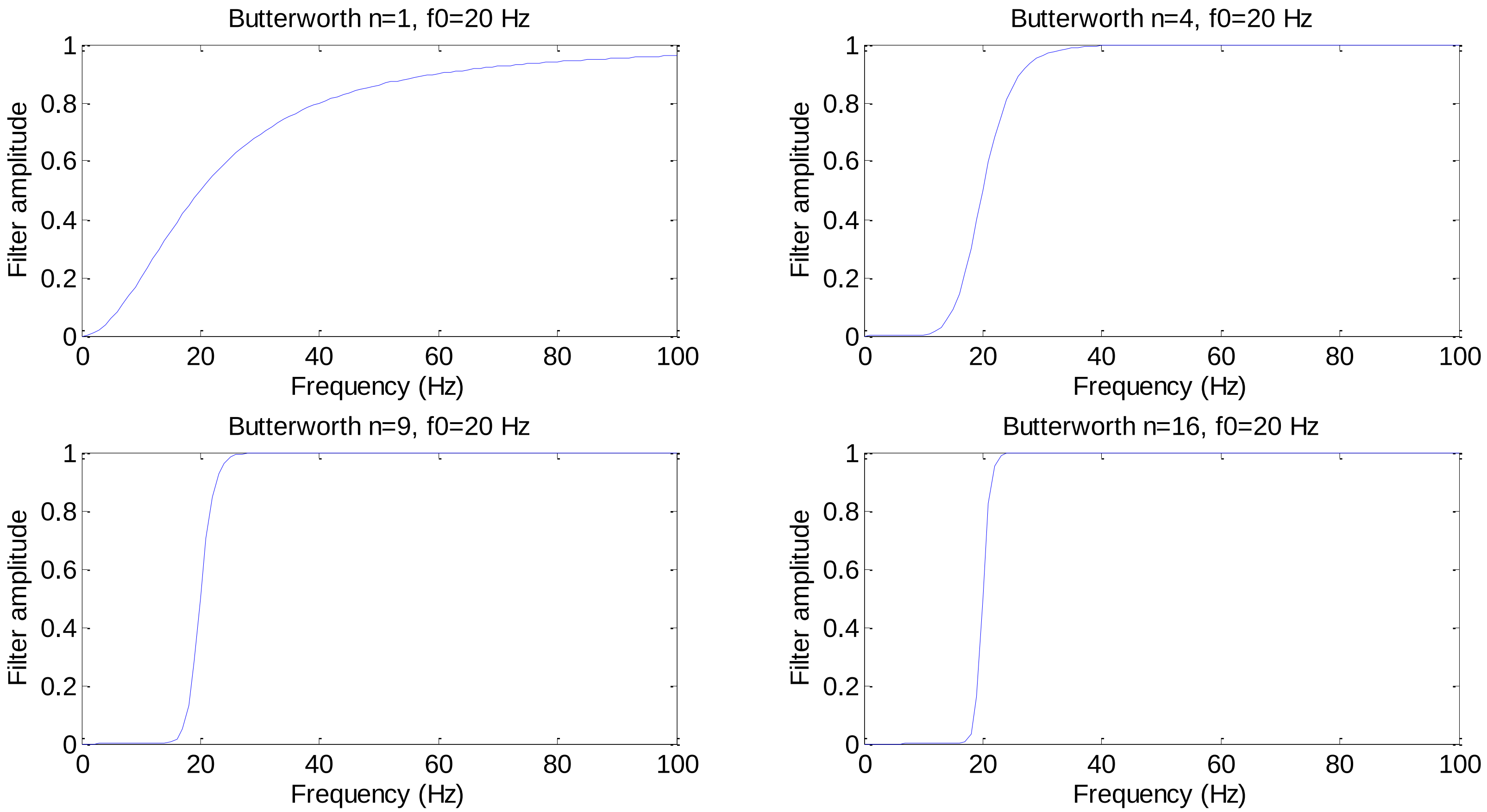
… on a seismogram …

… varying the cut-off frequency…

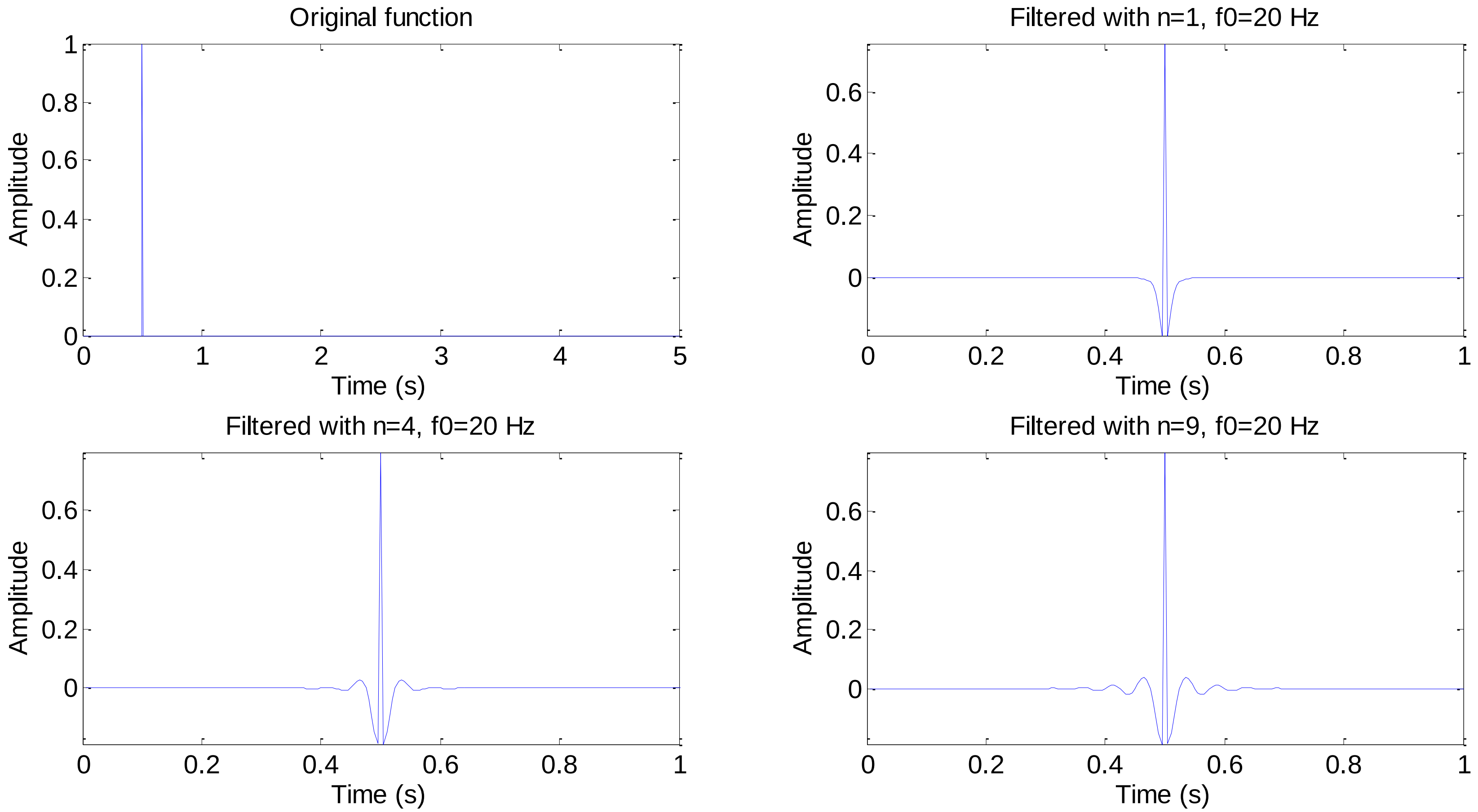


The Butterworth Filter (High-Pass)

$$|F_H(\omega)| = 1 - \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}$$

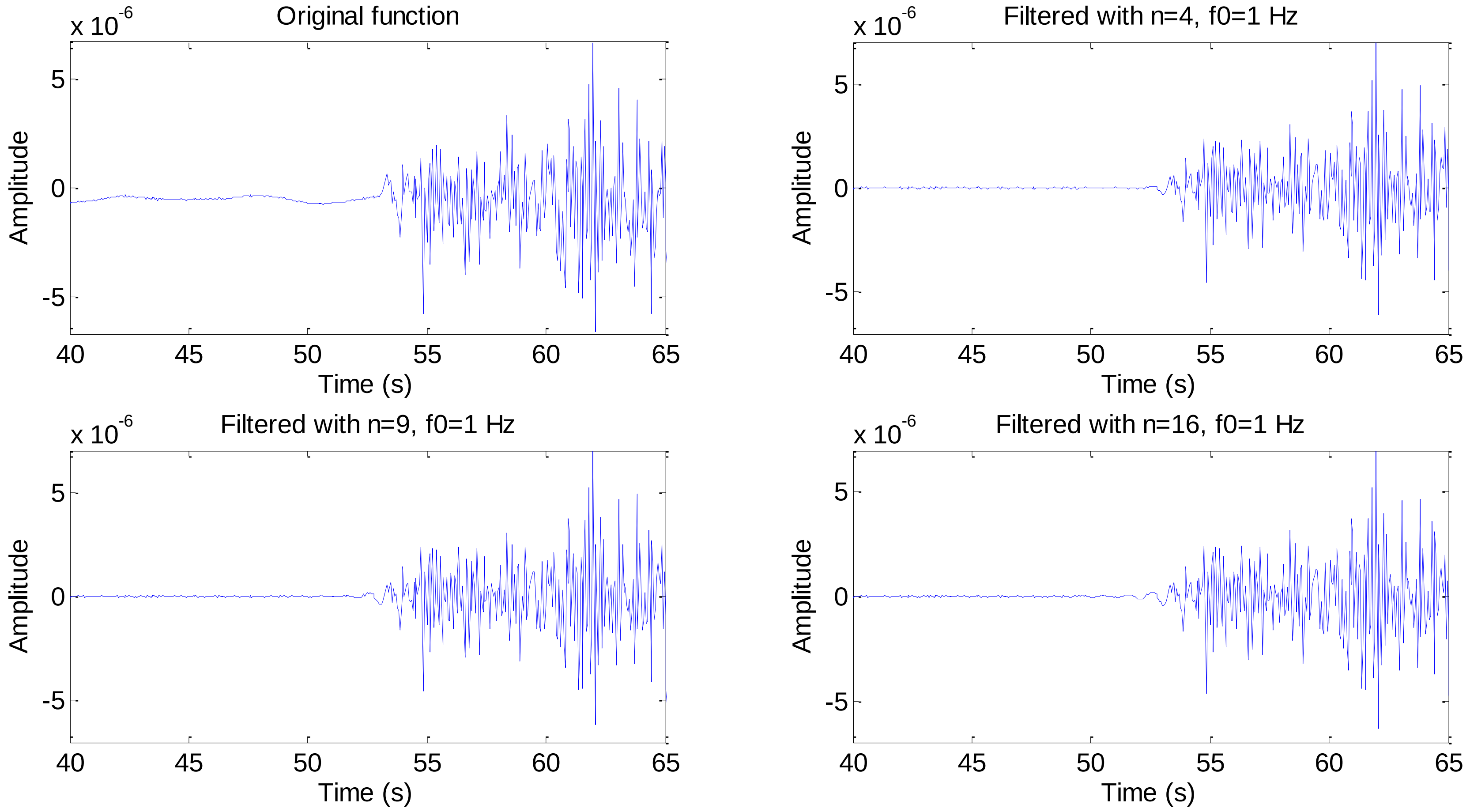


… effect on a spike …



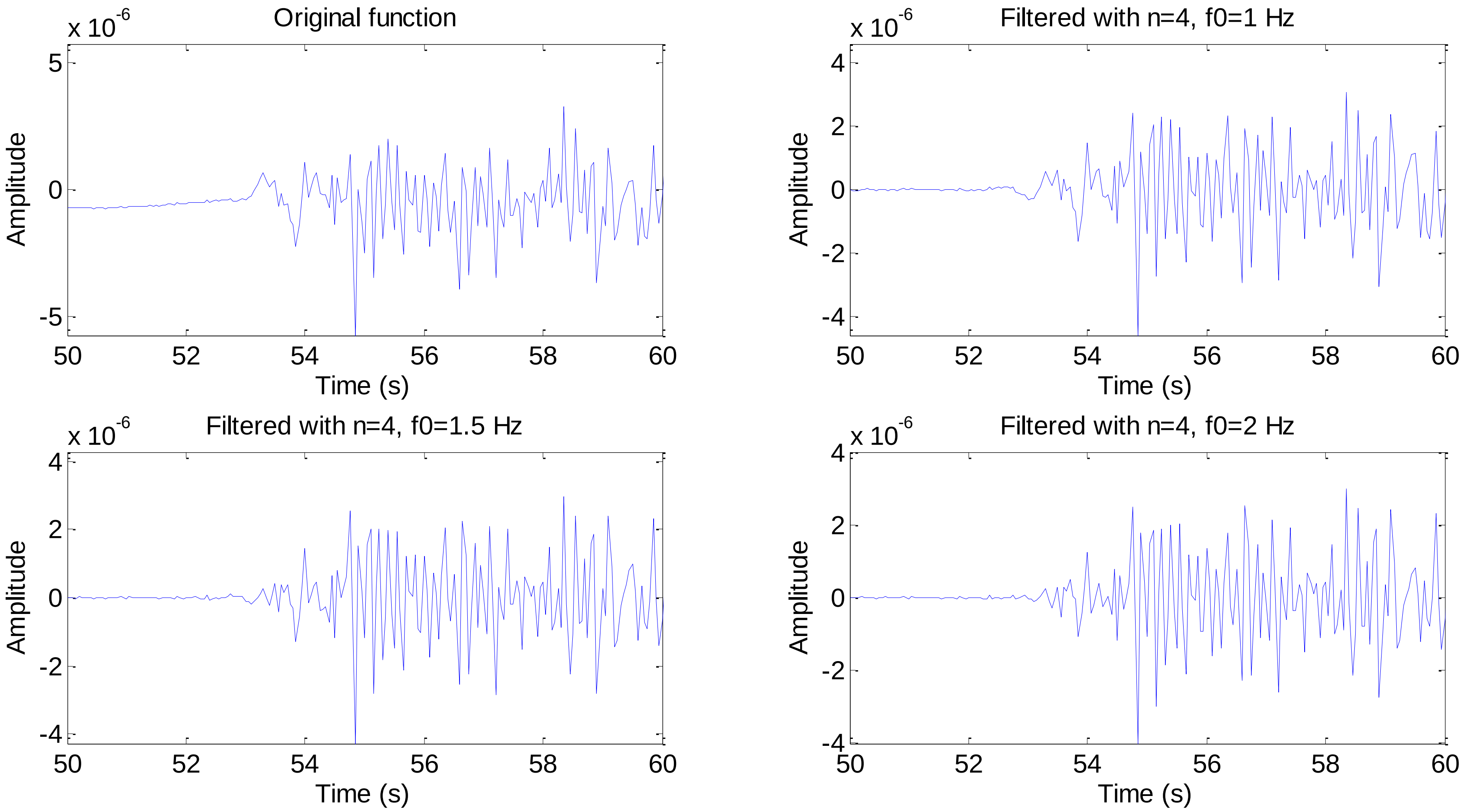
… on a seismogram …

… varying the order …



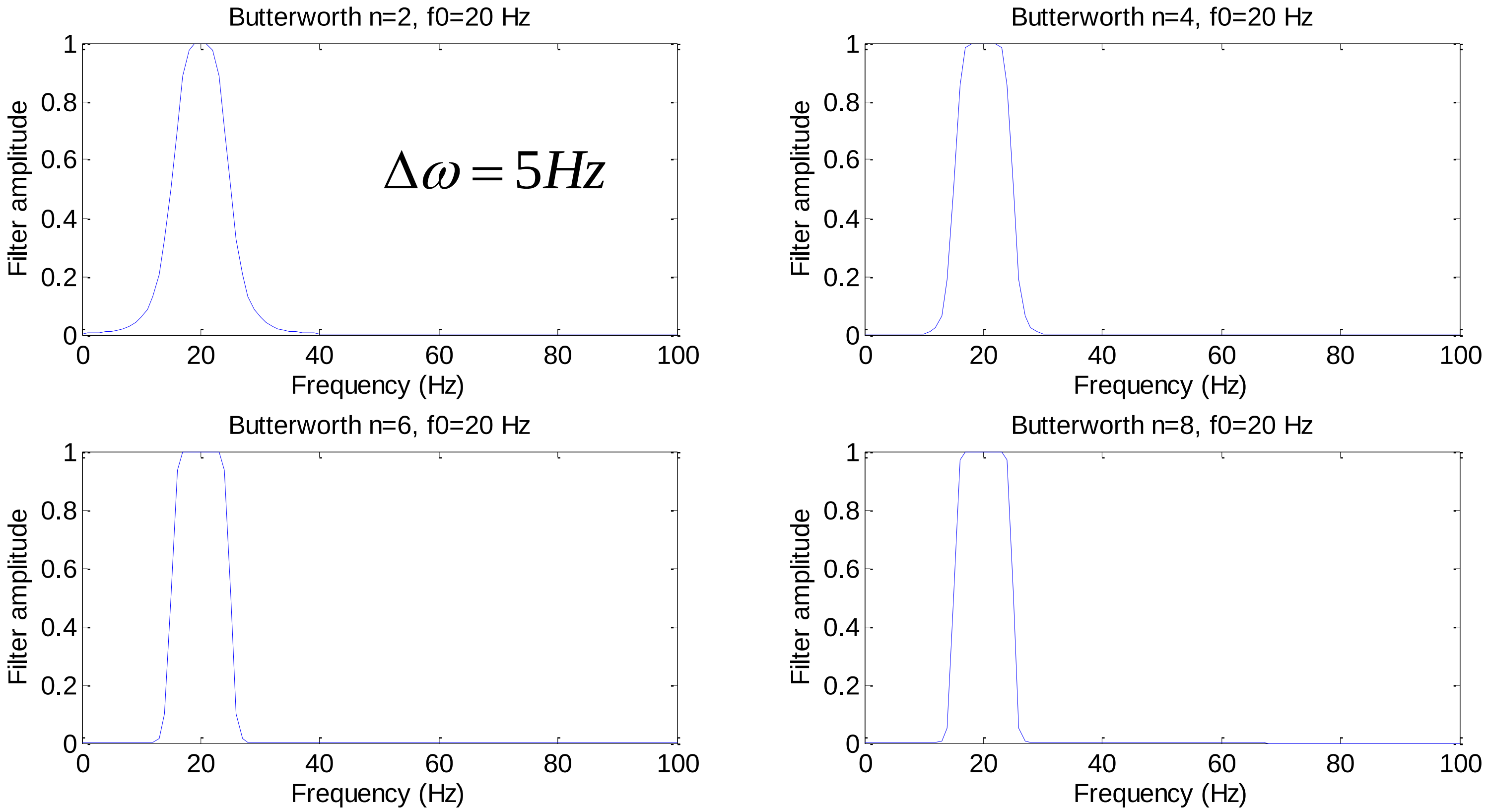
… on a seismogram …

… varying the cut-off frequency…

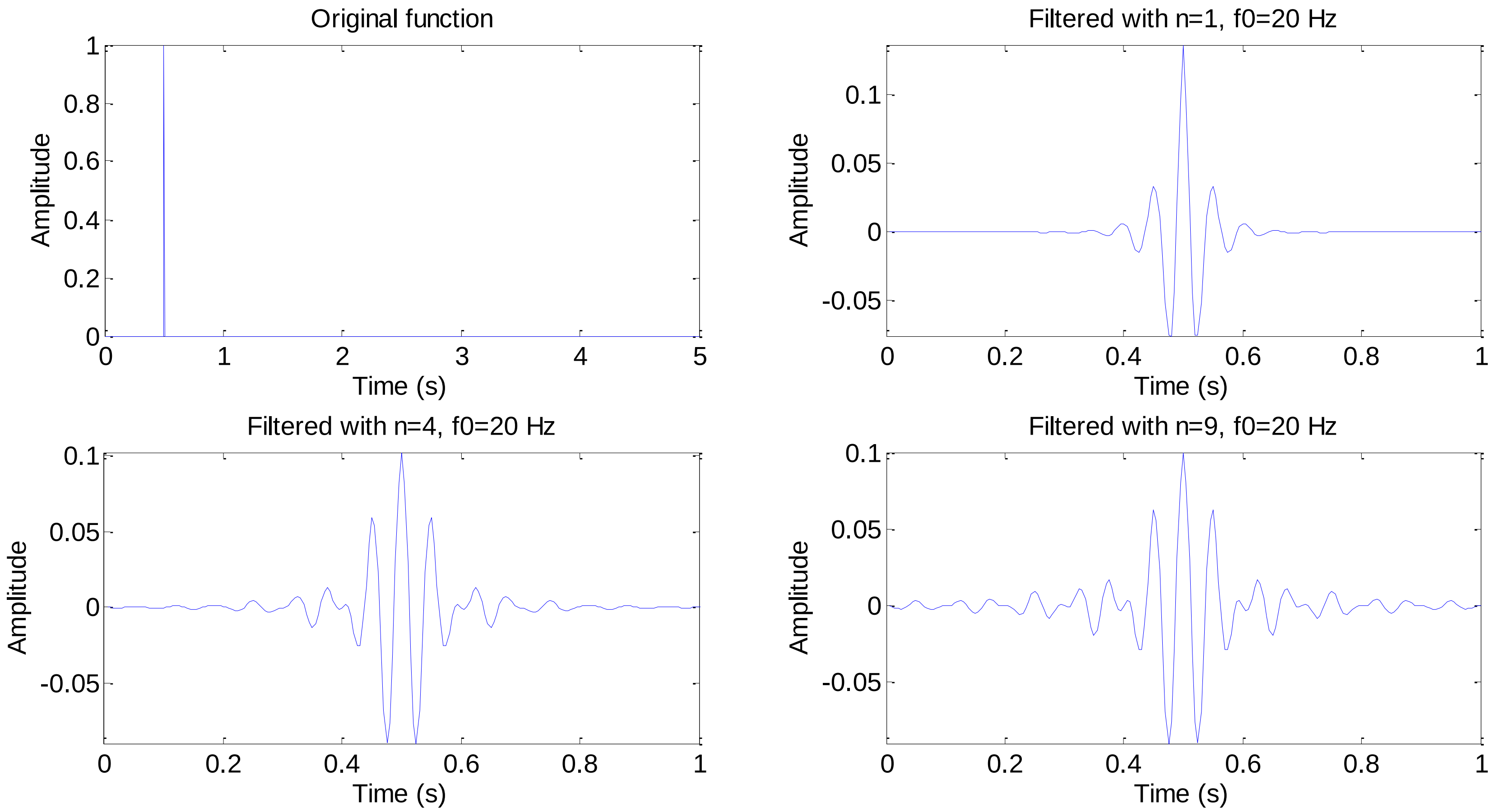


The Butterworth Filter (Band-Pass)

$$\left|F_{BP}(\omega)\right| = 1 - \frac{1}{1+\left[(\omega-\omega_b)/\Delta\omega\right]^{2n}}$$

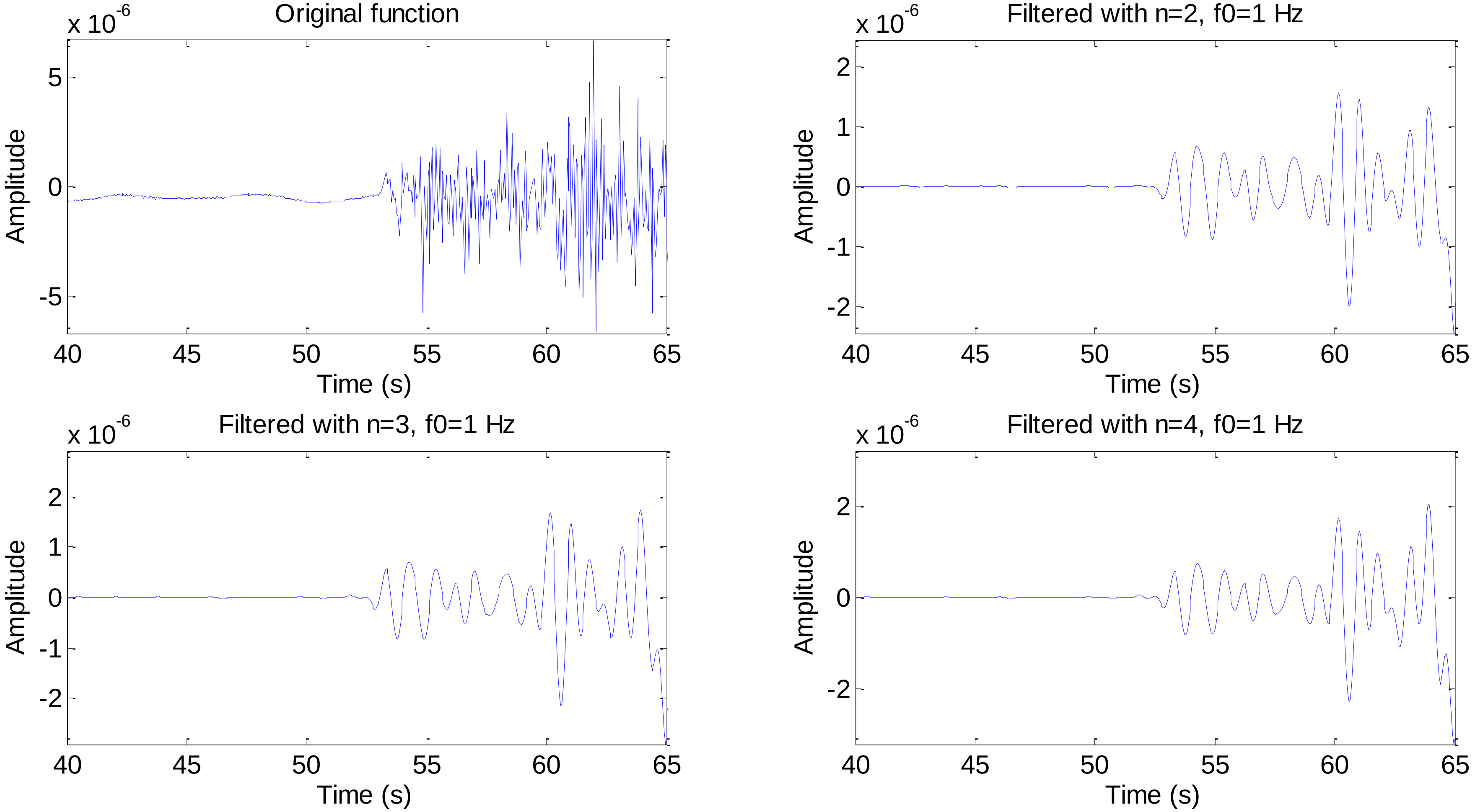


… effect on a spike …



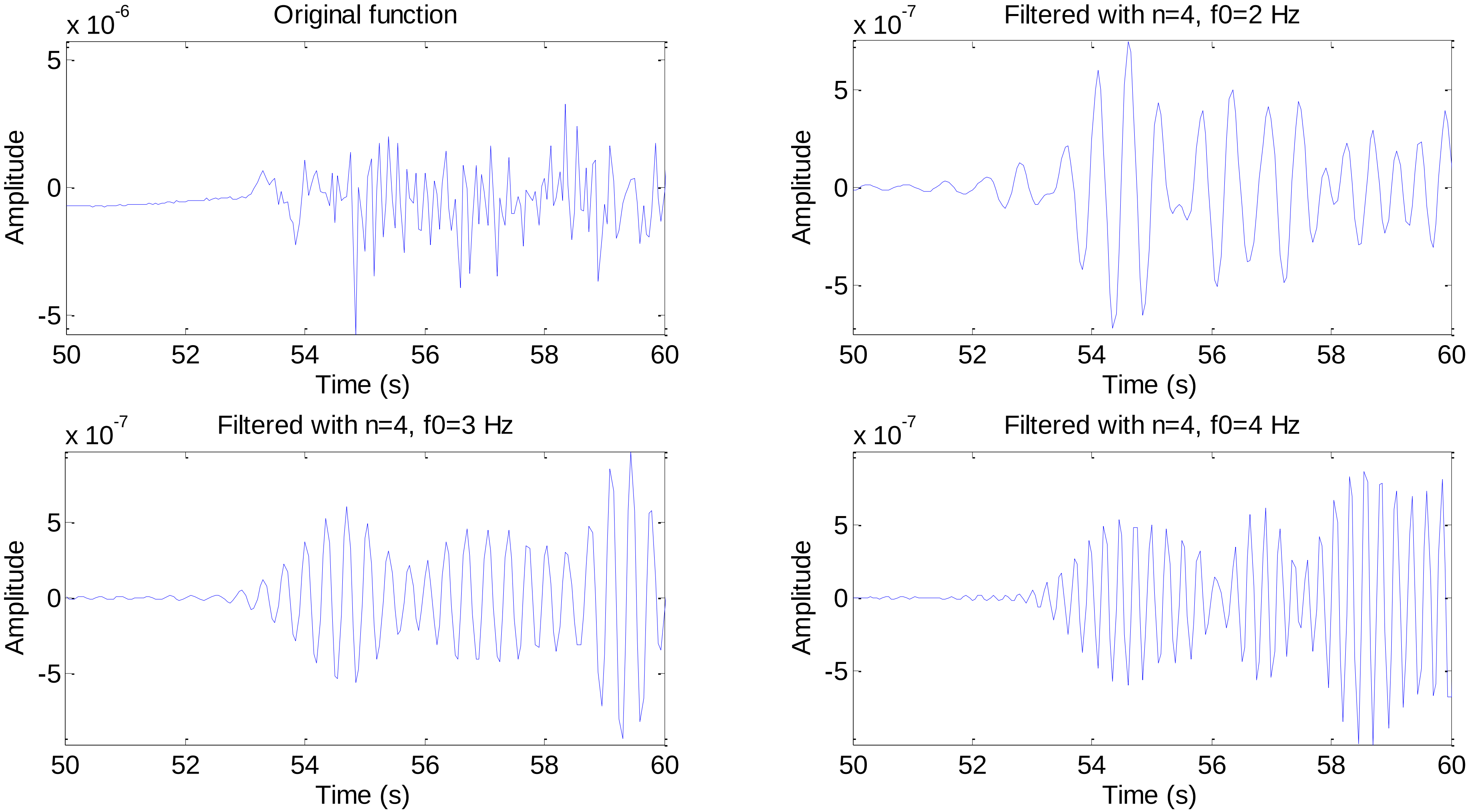
… on a seismogram …

… varying the order …

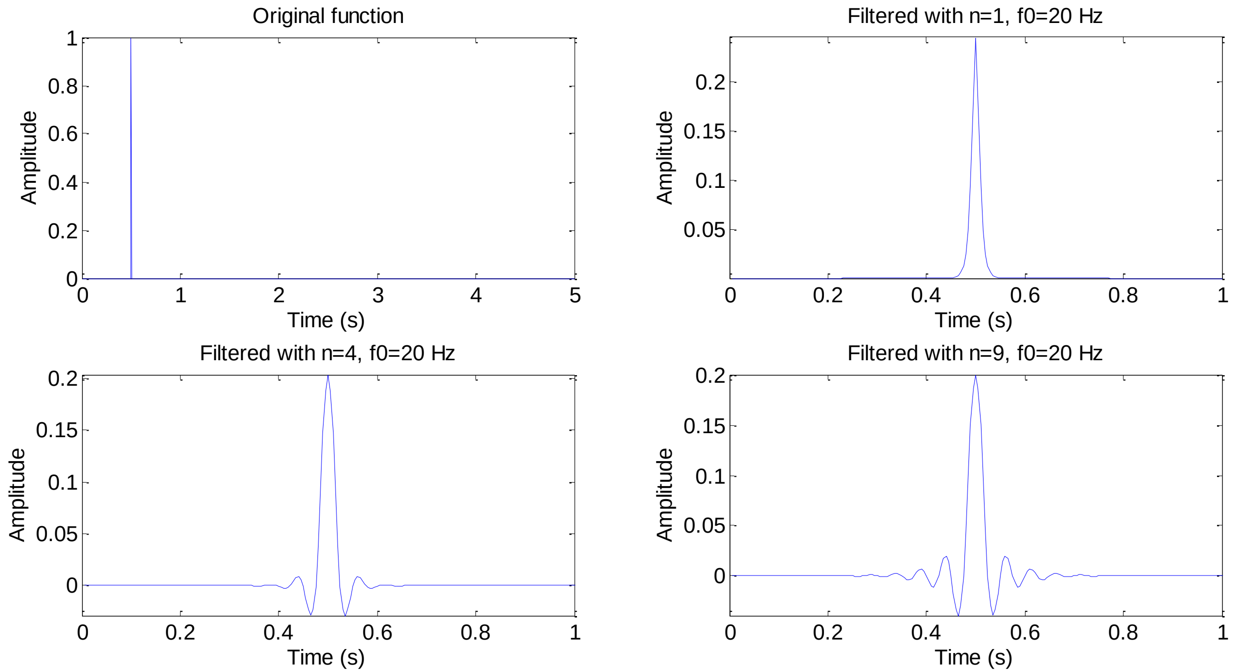


… on a seismogram …

… varying the cut-off frequency…



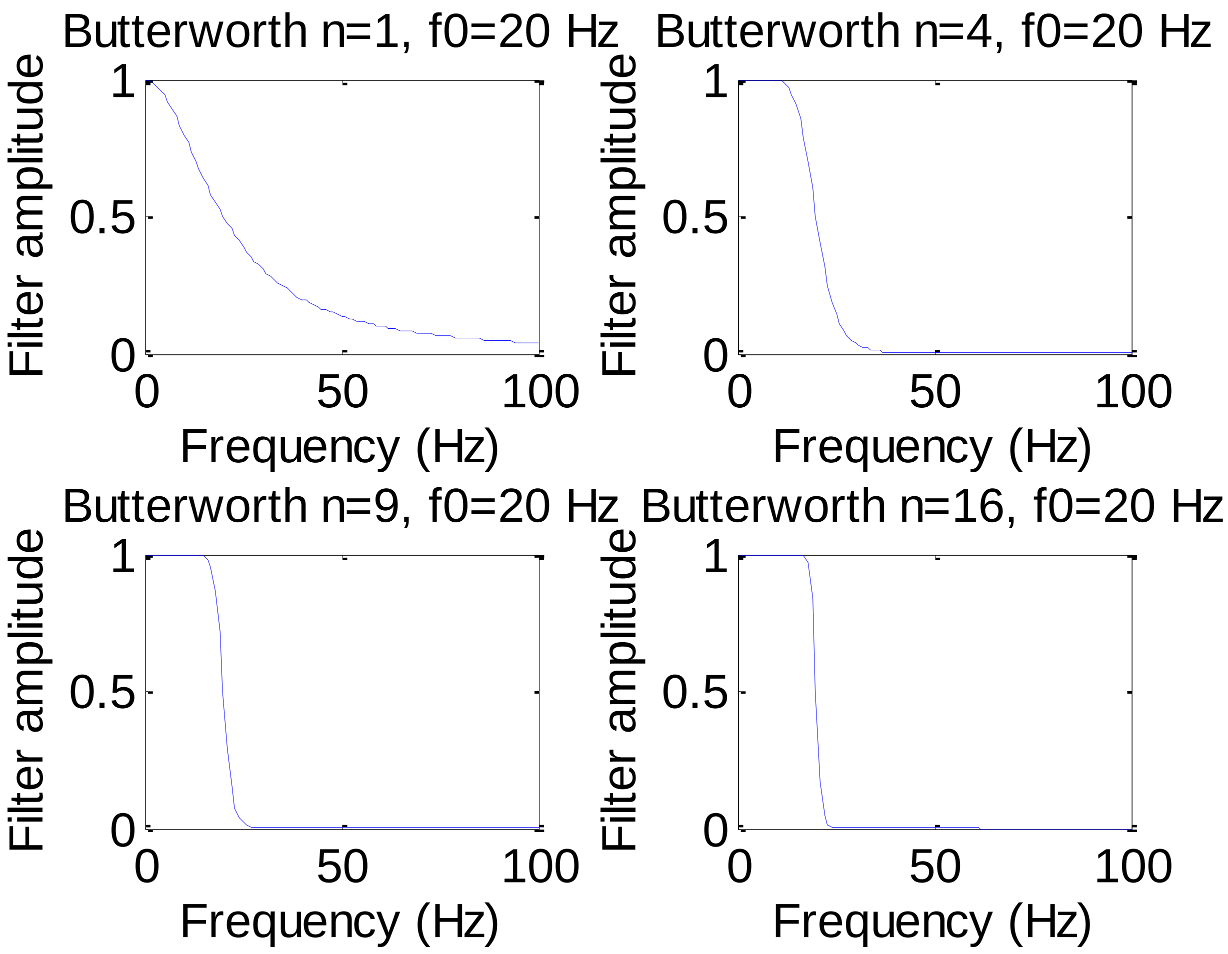
Zero phase and causal filters



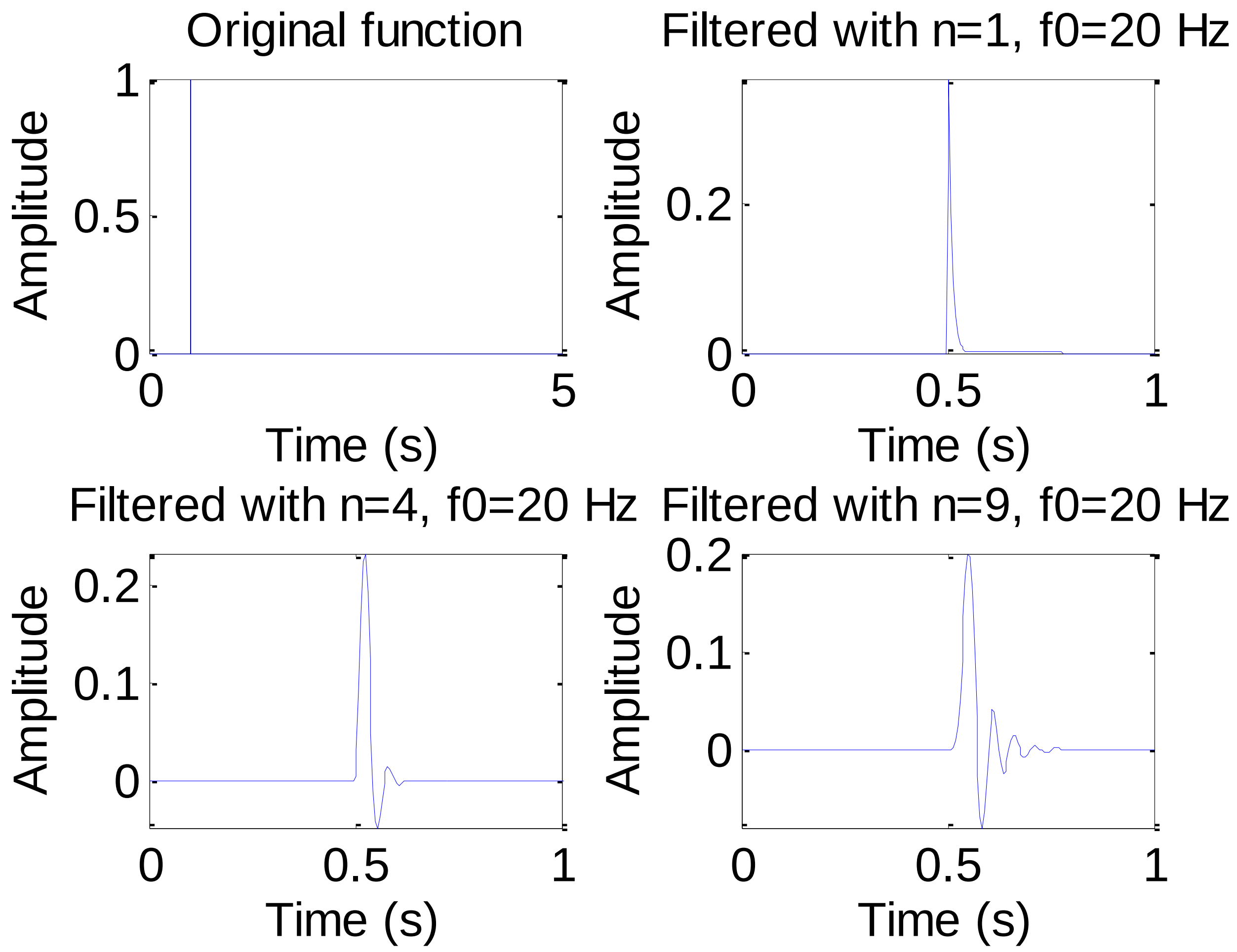
When the phase of a filter is set to zero (and simply the amplitude spectrum is inverted) we obtain a **zero-phase filter**. It means a peak will not be shifted.

Such a filter is **acausal**. Why?

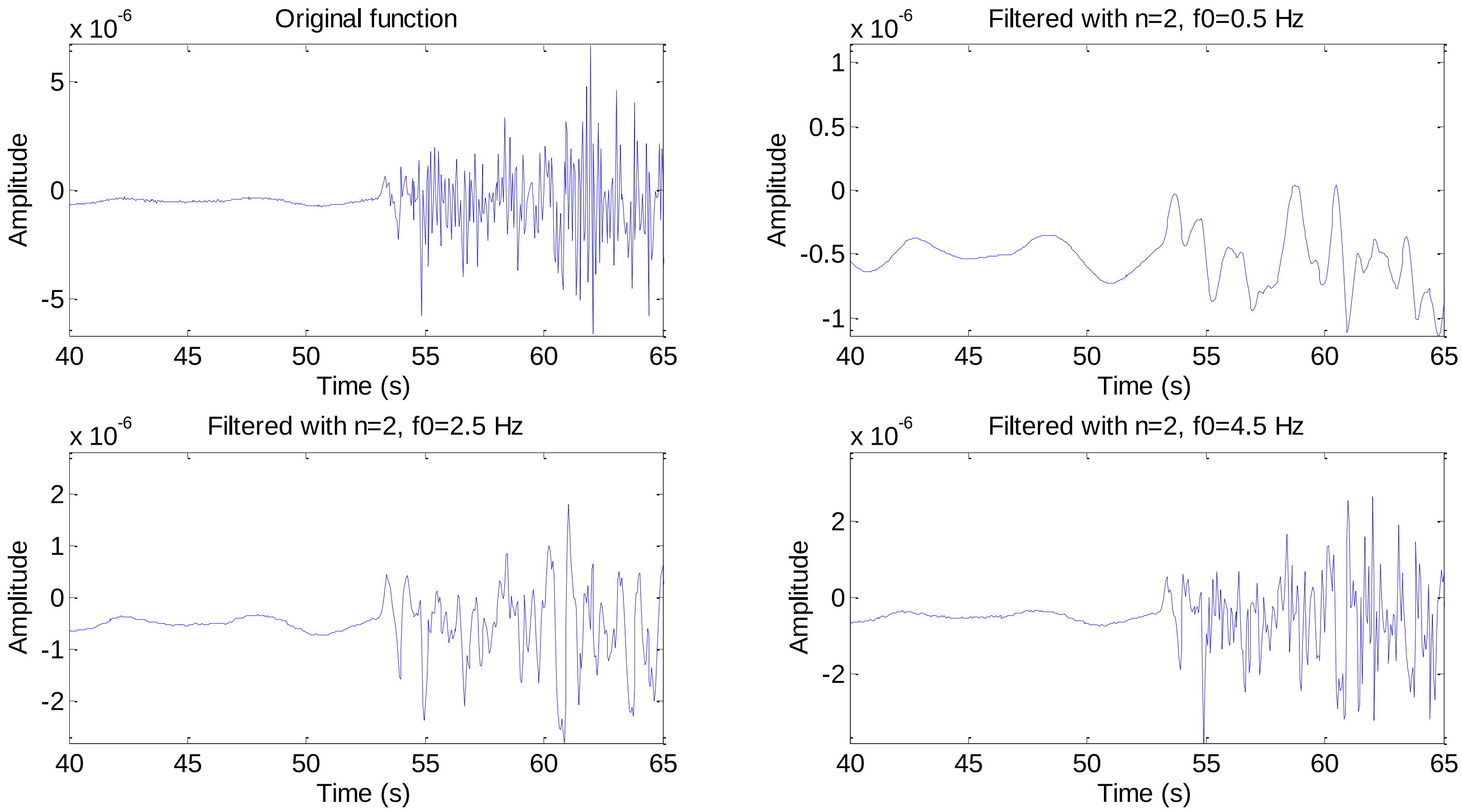
Butterworth Low-pass (20 Hz) on spike



(causal) Butterworth Low-pass (20 Hz) on spike



Butterworth Low-pass (20 Hz) on data



Zusammenfasung

Spektralanalyse ist die Basis der Dateninterpretation in der Seismologie

Die Konzepte sind:

(De-) Konvolution –> um die Response eines Systems auf einen bestimmte Eingabe zu erhalten (oder umgekehrt)

Korrelation -> um Signale nach ihrer Ähnlichkeit zu vergleichen und ihre Verschiebungen festzustellen. (Phasen Delays) Tomografie mit Korrelation von ozeanerzeugtem Rauschen

Fourier Transformation – Spektren - Filterung -> um bestimmte Frequenzen herauszuschneiden, und die interessanten Signale hervorzuheben, Rauschen zu unterdrücken.